su profesor particular

MATEMATICAS PARA TODOS

ENCICLOPEDIA UNIVERSAL DE MATEMATICAS

E.G.B. / B.U.P.
C.O.U. / SELECTIVIDAD
FORMACION PROFESIONAL / OPOSICIONES

MATEMATICAS PARA TODOS

VOLUMEN 2

DIRIGIDA POR: JUAN BAUTISTA GRAU OLIVE

ESPAÑA	ENSEÑANZA GENERAL BASICA (E.G.B.) FORMACION PROFESIONAL OPOSICIONES EN GENERAL
AMERICA	BACHILLERATO PRIMARIO BACHILLERATO ELEMENTAL OPOSICIONES EN GENERAL

EDICIONES RUEDA J.M. S.A.

EDITORIAL HORIZONTE

ÍNDICE DEL VOLUMEN 2

TEMA 17 INECUACIONES **321**
CONCEPTO DE DESIGUALDAD E INECUACION.
TRANSPOSICION DE TERMINOS EN UNA DESIGUALDAD O INECUACION.
REGLAS.
OPERACIONES CON DESIGUALDADES O INECUACIONES.
INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.
SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.
INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS.
SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS.
INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA.
SISTEMAS DE INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA.

TEMA 18 RAZONES Y PROPORCIONES **347**
CONCEPTO DE RAZON.
CONCEPTO DE PROPORCION.
TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES.
PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.
CUARTA PROPORCIONAL.
TERCERA PROPORCIONAL.
MEDIA PROPORCIONAL.
CLASES DE PROPORCIONALIDAD.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Magnitudes inversamente proporcionales.

REGLA DE TRES SIMPLE.
REGLA DE TRES COMPUESTA.
REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES.
- Repartimientos proporcionales directos.
- Repartimientos proporcionales inversos.
- Repartimientos proporcionales compuestos.

REGLA DE COMPAÑIA.

TEMA 19 COMBINATORIA 365
INTRODUCCION.
Naturaleza.
Orden.
VARIACIONES.
FORMACION DE LAS VARIACIONES.
Formación ordinaria.
Formación por diagrama en árbol.
VARIACIONES CON REPETICION.
FORMACION DE LAS VARIACIONES CON REPETICION.
Formación ordinaria.
Formación por diagrama en árbol.
PERMUTACIONES.
FORMACION DE LAS PERMUTACIONES.
PERMUTACIONES CIRCULARES.
PERMUTACIONES CON REPETICION.
FOMACION DE LAS PERMUTACIONES CON REPETICION.
DESCOMPOSICION DE m! EN FACTORES PRIMOS.
Primera forma.
Segunda forma.
COMBINACIONES.
FORMACION DE LAS COMBINACIONES.
COMBINACIONES CON REPETICION.
FORMACION DE LAS COMBINACIONES CON REPETICION.
PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS.
Primera propiedad.
Segunda propiedad.
Triángulo de Tartaglia.
Triángulo de Pascal.
POTENCIA DE UN BINOMIO. FORMULA DE NEWTON.
PARTICULARIDADES EN EL BINOMIO DE NEWTON.
Número de términos del desarrollo.
Características de los números combinatorios.
Cálculo del término general de un binomio.
POTENCIA DE UN POLINOMIO. FORMULA DE LEIBNITZ.
Cálculo de los términos.
Cálculo de los coeficientes.
Conjugación de términos y coeficientes.

TEMA 20 SISTEMA METRICO DECIMAL 397
INTRODUCCION.
UNIDADES DE LONGITUD.
UNIDADES DE SUPERFICIE.
UNIDADES AGRARIAS.
UNIDADES DE VOLUMEN.
UNIDADES DE CAPACIDAD.
UNIDADES DE PESO.
CUADRO RESUMEN DEL SISTEMA METRICO DECIMAL.
RELACION ENTRE EL SISTEMA METRICO DECIMAL Y EL SISTEMA INGLES DE UNIDADES.
Unidades de longitud.
Unidades de superficie.
Unidades de volumen.
Unidades de capacidad.
Unidades de peso.
Otras unidades.

TEMA 21 GEOMETRIA PLANA **405**
ESTUDIO DE LA LINEA.
Línea recta.
Línea quebrada.
Línea curva.
Línea mixta.
ANGULOS Y SUS TIPOS.
Angulo recto.
Angulo agudo.
Angulo obtuso.
Angulo cóncavo y convexo.
Angulo llano.
Angulos consecutivos.
Angulos opuestos por el vértice.
Angulos adyacentes.
FORMAS DE MEDIR UN ANGULO.
Grados sexagesimales.
Grados centesimales.
Conversión de grados sexagesimales a centesimales y viceversa.
Radianes.
OPERACIONES CON ANGULOS.
Suma de ángulos.
Diferencia de ángulos.
Producto de un ángulo por un número.
Cociente de un ángulo entre un número.
POLIGONOS.
Concepto de un polígono.
Número de diagonales de un polígono.
Suma de ángulos interiores de un polígono.
Suma de ángulos exteriores de un polígono.
ESTUDIO GENERAL DE UN TRIANGULO.
Construcción geométrica de un triángulo.
Clasificación de los triángulos por sus lados.
Clasificación de los triángulos por sus ángulos.
Estudio particular del triángulo rectángulo.
Teorema de Pitágoras.
Teorema de la altura.
Teorema del cateto.
Generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.
FORMA DE UN TRIANGULO.
PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE UN TRIANGULO.
Baricentro.
Circuncentro.
Ortocentro.
Incentro.
SEMEJANZA DE TRIANGULOS.
TEOREMA DE THALES.
AREA DE UN TRIANGULO.
FORMULA DE HERON.
CUADRILATEROS.
Clasificación por sus ángulos.
Clasificación por sus lados.
CUADRADO.
RECTANGULO.
PARALELOGRAMO.
ROMBO.

TRAPECIO.
POLIGONOS REGULARES.
CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO.
Concepto.
Líneas que se consideran en una circunferencia.
Posiciones relativas de dos circunferencias.
Angulos en la circunferencia.
Longitud de una circunferencia.
Longitud de un arco de circunferencia.
Area del círculo.
FIGURAS EN EL CIRCULO.
Sector circular.
Segmento circular.
Corona o anillo circular.
Trapecio circular.
ELIPSE.
COMPOSICION DE FIGURAS REGULARES.
Lado y apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia en función del radio.
Lado y apotema de un cuadrado circunscrito a una circunferencia en función del radio.
Lado y apotema de un exágono inscrito a una circunferencia en función del radio.
Lado y apotema de un exágono circunscrito a una circunferencia en función del radio.
Lado y apotema de un triángulo equilátero, inscrito a una circunferencia en función del radio.
Lado y apotema de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia en función del radio.
PROBLEMAS DE RECAPITULACION.

TEMA 22 GEOMETRIA DEL ESPACIO **501**
EL PLANO.
DETERMINACION DE UN PLANO.
POSICION RELATIVA DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.
Posición relativa de dos planos.
Posición relativa de dos rectas en el espacio.
Posición relativa de recta y plano.
LINEA DE MAXIMA PENDIENTE DE UN PLANO.
ANGULOS DIEDROS.
ANGULOS POLIEDROS.
POLIEDROS REGULARES.
Exaedro o Cubo.
Tetraedro.
Octaedro.
Dodecaedro.
Icosaedro.
TEOREMA DE EULER.
ESTUDIO DE FIGURAS EN EL ESPACIO.
Prisma.
Pirámide.
Tronco de Pirámide.
Cilindro.
Cono.
Tronco de Cono.

GEOMETRIA DE LA ESFERA.
Esfera.
Huso esférico.
Cuña esférica.
Casquete esférico.
Zona esférica.
Segmento esférico.
Sector esférico.
EL PRISMATOIDE Y SUS GENERALIZACIONES.
PROBLEMAS DE RECAPITULACION.

TEMA 23 PROGRESIONES ARITMETICAS **603**
INTRODUCCION.
CONCEPTO DE PROGRESION ARITMETICA.
CALCULO DEL TERMINO N-SIMO O GENERAL DE UNA PROGRESION ARITMETICA.
INTERPOLACION ARITMETICA.
SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION ARITMETICA.
PROGRESIONES ARITMETICAS DE NUMERO DE TERMINOS IMPAR TERMINO CENTRAL.
LAS PROGRESIONES ARITMETICAS Y LOS CONJUNTOS

TEMA 24 PROGRESIONES GEOMETRICAS **627**
DEFINICION.
TERMINO N-ENESIMO DE UNA PROGRESION GEOMETRICA.
INTERPOLACION GEOMETRICA.
TERMINOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS.
PRODUCTO DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA LIMITADA.
SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA LIMITADA.
SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA ILIMITADA.
GENERATRIZ DE NUMEROS DECIMALES PERIODICOS.

TEMA 17

INECUACIONES

INDICE

1.—Concepto de desigualdad e inecuación.
2.—Transposición de términos en una desigualdad o inecuación. Reglas.
3.—Operaciones con desigualdades o inecuaciones.
4.—Inecuaciones de primer grado con una incógnita.
5.—Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.
6.—Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
7.—Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
8.—Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.
9.—Sistemas de inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

TEMA 17

CURIOSIDADES

Supongamos que el mismo año en que nació Jesucristo, una persona depositó en el banco 1 pta. al interés compuesto del 10 % y lo dejaremos hasta el año 2.000:

$(1'1)^{2.000}$

Con todo el petróleo que existe en el subsuelo, con todo el oro del mundo, y en fin, con todas las riquezas de la tierra, no había manera de pagar esto.

INECUACIONES

1.— CONCEPTO DE DESIGUALDAD E INECUACION.

En las ecuaciones utilizábamos el signo = para separar sus dos miembros, en las inecuaciones se utiliza el signo $<$ ó $>$ que expresan una desigualdad.

Es decir, entendemos por **desigualdad** a la forma de indicar matemáticamente cuándo una expresión P es mayor o menor que otra Q (según el sentido que tenga el signo).

$P > Q$ (P es mayor que Q o Q es menor que P)

$P \leqslant Q$ (P es menor o igual que Q o Q es mayor o igual que P)

A la expresión P que está a la izquierda del signo desigual se le llama **primer miembro** y a la expresión Q que está a la derecha del signo desigual se le llama **segundo miembro**.

NOTA.— Obsérvese que cualquiera de los signos $<$ ó $>$ se puede leer por la izquierda o por la derecha, asociándose de cualquier forma la idea o relación matemática que expresen.

Pues bien, se entiende por **inecuación** a cualquier desigualdad en la que existan letras o incógnitas motivo de cálculo.

Ej.: $X < S$

Téngase en cuenta que una ecuación sólo se verifica para determinados valores de sus incógnitas, es decir, que generalmente existen un número finito de soluciones, sin embargo las inecuaciones suelen aportar infinitas soluciones.

Así pues, resolver una inecuación, consiste en determinar un conjunto de valores que verifiquen la desigualdad, y al ser el conjunto de soluciones generalmente infinito, suele ser norma frecuente el representar el cúmulo de soluciones gráficamente.

Entendemos por **inecuaciones equivalentes** a aquellas que poseen el mismo conjunto de soluciones.

2.—TRANSPOSICION DE TERMINOS EN UNA DESIGUALDAD O INECUACION. REGLAS.

En cierto modo, la transposición de términos que se efectue en una inecuación o desigualdad sigue ciertos aspectos paralelos con respecto a las ecuaciones, sin embargo existen matices de capital importancia que las distinguen y que se van a ir exponiendo sucesivamente:

a) Cualquier término de una desigualdad que esté sumando en un miembro, se puede pasar al otro miembro restando o viceversa (propiedad que ya sabemos se aplicaba también en las ecuaciones)

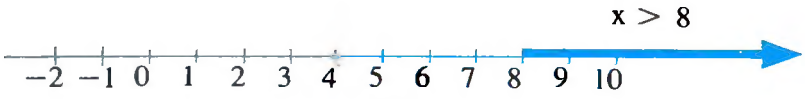
Ej.: vamos a manipular la desigualdad: $8 + 3 < 5 + 20$

$8 - 20 < 5 - 3$

Ej.: Resolver la inecuación: $2x - 5 > x + 3$

$2x - x > 3 + 5 \Rightarrow x > 8$

Si la solución de la inecuación la queremos expresar gráficamente, dibujaremos un eje horizontal, representativo de todos los números reales y expondremos a trazo grueso la zona que corresponde a las soluciones.



CONSECUENCIA: Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o se les resta un mismo número, la desigualdad no cambia de sentido.

Ej.: $2 < 5 \begin{cases} 2 + 3 < 5 + 3 \Rightarrow 5 < 8 \\ 2 - 6 < 5 - 6 \Rightarrow -4 < -1 \end{cases}$

b) Cualquier término de una desigualdad que esté multiplicando en un miembro tiene aptitud para pasar al otro miembro dividiendo o viceversa, siempre que el término motivo de la transposición sea positivo.

Si el término es negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Ej.: Vamos a manipular la desigualdad: $3 \cdot 2 < 4 \cdot 5$

$$3 < \frac{4 \cdot 5}{2} \Rightarrow 3 < 10$$

Como el término transpuesto es positivo (2) la desigualdad conserva su sentido.

Ej.: Vamos a manipular la desigualdad: $-3 \cdot 5 > -7 \cdot 9$

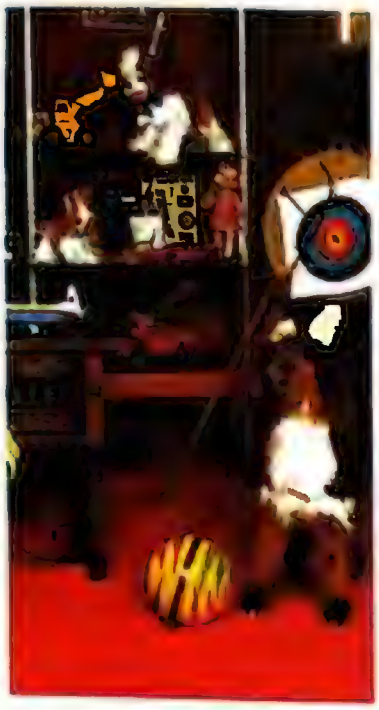
$$5 < \frac{-7 \cdot 9}{-3} \Rightarrow 5 < 27$$

El gusto es el sentido que más fácilmente se presta al engaño, muchos creen que se encuentra totalmente en la lengua lo que solamente es cierto en parte, ya que cuando una cosa nos sabe bien expresamos el resultado de media docena de sensaciones distintas ajenas al gusto, gustamos con el olfato, con las extremidades táctiles de nuestros nervios e incluso con nuestra memoria.

Cuando comemos o bebemos entra en función la saliva que disuelve estos alimentos inundando unos diminutos huequecillos distribuidos en la lengua que responden enviando al cerebro una de sus cuatro sensaciones básicas, dulce, salado, amargo o agrio.

Estos cropúsculos están especializados en la percepción de uno de dichos sabores, los que perciben el dulce estan en la punta de la lengua, los salados en los lados y parte anterior, detrás los del sabor agrio y en la parte posterior de la lengua se encuentran los del amargo.

Tan importante como el gusto es el olfato. El café es casi tan amargo como la quinina pero su aroma, al pasar de la parte posterior de la lengua a las extremidades de los nervios nasales, hace que nos resulte agradable.



Os recomiendo, si alguna vez tenéis ocasión, visitéis una fábrica de juguetes, o bien solos o en visita programada del colegio. Es una visita muy instructiva y curiosa.

Yo recuerdo una vez que un dibujante estaba diseñando un ladrillo (por supuesto a escala). El diminutivo ladrillito, estaba construido exactamente igual que el modelo, pero repito, mucho más pequeño. Me pregunté: si el ladrillo grande pesa cuatro kilogramos, y el de juguete es la cuarta parte. ¿Cuánto pesará éste?

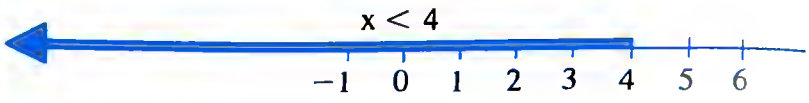
La solución en Pág. 352

Ej.: Resolver la inecuación: $x - 3 > 2x - 7$

Transponiendo términos, obtenemos:

$$x - 2x > -7 + 3$$
$$-x > -4$$
$$x < 4$$

Gráficamente expuesta la solución. $x < 4$



CONSECUENCIA.—Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un número positivo, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Ej.: $8 < 10 \begin{cases} 8 \cdot 5 < 10 \cdot 5 \Rightarrow 40 < 50 \\ \frac{8}{2} < \frac{10}{2} \Rightarrow 4 < 5 \end{cases}$

Si a los miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Ej.: $16 > 12 \begin{cases} 16(-2) < 12(-2) \Rightarrow -32 < -24 \\ \frac{16}{-2} < \frac{12}{-2} \Rightarrow -8 < -6 \end{cases}$

Si cambiamos de signo a los dos miembros de una desigualdad, ésta cambia de sentido, ya que en realidad hemos estado multiplicando por -1 toda la desigualdad.

Ej.: $-2 < 4 \Rightarrow 2 > -4$

En cualquier desigualdad podemos eliminar sus denominadores, si existen, multiplicando sus dos miembros por el m.c.m. de sus denominadores y teniendo en cuenta el signo del citado m.c.m.

Ej.: $\frac{5}{3} < \frac{18}{7} \Rightarrow 21 \cdot \frac{5}{3} < 21 \frac{18}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \cdot 5 < 3 \cdot 18 \Rightarrow 35 < 54$ m.c.m $(3,7) = 21$

3.—OPERACIONES CON DESIGUALDADES O INECUACIONES.

Vamos a estudiar lo que puede ocurrir cuando manipulamos dos o más inecuaciones distintas.

a) Si sumamos miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que las anteriores.

Ej.: Sumar las desigualdades: $4 < 5$ y $-3 < -1$

$$\begin{array}{r} 4 < 5 \\ -3 < -1 \\ \hline 4-3 < 5-1 \end{array} \Rightarrow 1 < 4$$

b) Si restamos miembro a miembro dos desigualdaes del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad cuyo sentido no es posible determinar.

NOTA.— Si dos desigualdades poseen distinto sentido podemos aplicar lo expuesto anteriormente. sin más que transponer los términos de los dos miembros de una de las desigualdades.

Ej.: Sumar las desigualdades: $3 < 4$ y $5 > 2$

$$\left.\begin{array}{l} 3 < 4 \\ 5 > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 3 < 4 \\ 2 < 5 \\ \hline 3+2 < 5+4 \end{array} \Rightarrow 5 < 9$$

c) Si elevamos los dos miembros de una desigualdad a una potencia de exponente impar la desigualdad conserva su sentido.

Ej.: $2 < 3 \Rightarrow 2^3 < 3^3 \Rightarrow 8 < 27$

Ej.: $-5 < -2 \Rightarrow (-5)^3 < (-2)^3 \Rightarrow -125 < -8$

Ej.: $1 > -3 \Rightarrow (1)^3 > (-3)^3 \Rightarrow 1 > -27$

d) Si elevamos los dos miembros de una desigualdad a una potencia de exponente par, pueden ocurrir diversas cuestiones en la desigualdad.

— Si los dos miembros son positivos, el sentido de la desigualdad no cambia.

Ej.: $3 < 4 \Rightarrow 3^2 < 4^2 \Rightarrow 9 < 16$

— Si los dos miembros son negativos, cambia el sentido de la desigualdad.

Ej.: $-3 < -2 \Rightarrow (-3)^2 > (-2)^2 \Rightarrow 9 > 4$

— Si los dos miembros son de distinto signo, no se puede determinar el signo de la desigualdad.

NOTA.— Todas las transposiciones y operaciones con desigualdades también son de aplicación a las inecuaciones.

Sin embargo, en las inecuaciones habrá que tener gran cuidado en el momento de multiplicar o dividir a los dos miembros de éstas por expresiones que contengan a la incógnita, debido a que dependiendo del valor que tomen éstas, la expresión tomará un valor positivo o negativo, efectos que provocan situaciones diferentes.

De todas formas posteriormente se irán analizando estas cuestiones.

La constelación de Andrómeda tiene aproximadamente mil millones de estrellas (planetas, satélites, cometas, etc.)

Está considerada como la constelación más lejana de la que nosotros tenemos noticias. Después de saber que tiene esta cantidad de estrellas, vamos a ver otra cosa y aún más curiosa, si cabe, que ésta. La distancia que está de la Tierra es, asómbrense, de dos millones de años luz, o sea, la luz que vemos de ellas y a través de potentísimos telescopios, (es de la única manera que se observan) su luz salió nada más ni nada menos que hace *dos millones de años.*

Calculemos la distancia en Kms.:

60 × 60 × 24 × 365 × 2.000.000 × × 300.000 Kms/seg.
3.600 × 8.760 × 600.000.000.000
31.536.000 × 600.000.000.000
18.921.600.000.000.000.000

Casi diecinueve trillones de kilómetros.

La Biblioteca Nacional es además de la primera por el número de volúmenes (unos dos millones entre libros, manuscritos y grabados) un hermoso edificio monumental rodeado de estatuas y jardines, en él se celebran exposiciones de gran calidad y sus salas de lectura y de consulta están a disposición de todos los estudiantes y los estudiosos del país.

Fue fundada por Felipe V, rey nacido en Francia influenciado espiritualmente por su país, y no obstante buen amigo español, amigo y protector de las artes y las letras. En este centro se reunieron la mayoría de los libros de valor que estaban dispersos por muchos palacios. En la actualidad su tesoro bibliográfico se compone de un fondo de 2.547 incunables perfectamente estudiados y catalogados. Estos incunables, libros impresos desde la invención de la imprenta hasta los primeros años del siglo XVI. Son la mayoría de gran valor artístico. En los primeros tiempos se imitaba en su confección a los menuscritos dejando incluso espacio en blanco pare dibujar a mano y a todo color las letras iniciales de los capítulos y las ilustraciones. Además de estos ejemplares únicos se guerdan miles de manuscritos, estampas y grabados de gran mérito y rareza y libros matemáticos y técnicos de todas las épocas.

4.—INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

En las inecuaciones lo mismo que en las ecuaciones, hay que hallar un conjunto de soluciones dentro del conjunto de los números reales R, que deben satisfacer las condiciones de la inecuación.

Téngase en cuenta, como ya se ha expuesto, que las inecuaciones poseen en general infinitas soluciones y que éstas se pueden expresar:

Mediante una inecuación absolutamente elemental.

Mediante una gráfica representada en un eje que contenga a todos los números reales y donde estén destacadas las soluciones de la inecuación (suele ser la forma más usada para indicar las soluciones de una inecuación).

Ej.: Resolver la inecuación: $2x < x + 1$

Efectuando transposición de términos.

$2x < x + 1 \Rightarrow 2x - x < 1 \Rightarrow x < 1$

Gráficamente representada.

De lo que se deduce que cualquier número $x \in R$, que sea menor de 1, es solución o satisface a la inecuación.

Ej.: Resolver la inecuación: $2x + 3 < 2$

$$2x + 3 < 2 \Rightarrow 2x < 2 - 3 \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

Ej.: Resolver la inecuación: $\dfrac{1^2 - \dfrac{2x}{3}}{5 + 3/4} + x \leqslant \dfrac{2x - 1/2}{4/3}$

Seguimos un ritmo de operaciones semejante al de las ecuaciones, es decir el motivo principal e inicial es eliminar denominadores.

$$\frac{\dfrac{3 - 2x}{3}}{\dfrac{20 + 3}{4}} + x \leqslant \frac{\dfrac{4x - 1}{2}}{\dfrac{4}{3}}$$

$$\frac{4(3 - 2x)}{3(20 + 3)} + x \leqslant \frac{3(4x - 1)}{4 \cdot 2}$$

$$\frac{12 - 8x}{60 + 9} + x \leqslant \frac{12x - 3}{12}$$

$$\frac{12 - 8x}{69} + x \leqslant \frac{12x - 3}{12} \quad \text{m.c.m. } (69,12) = 276$$

$$4(12 - 8x) + 276x \leqslant 23(12x - 3)$$

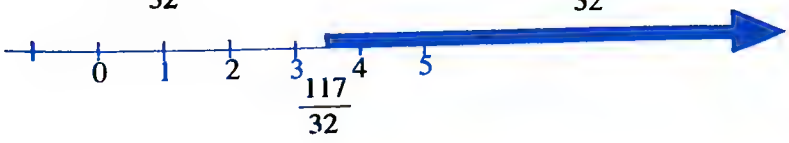
$$48 - 32x + 276x \leqslant 276x - 69$$

$$-32x + 276x - 276x \leqslant -69 - 48$$

$$-32x \leqslant -117$$

$$32x \geqslant 117$$

$$x \geqslant \frac{117}{32} \qquad x \geqslant \frac{117}{32}$$



CURIOSIDADES

Decidle a un amigo que escriba un número de tres cifras, sean cualesquiera. A ese número de tres cifras añádasele el mismo número a la derecha, para de esa forma obtener un número de 6 cifras. Otro amigo de la reunión que divida el número (de 6 cifras) por 7. No preocuparos que tiene que dar división exacta. Al cociente que resulte de esta nueva división se divide nuevamente por 11 (otro compañero). El cociente resultante se divide nuevamente por 13. Tampoco queda resto. Luego, decirle al que escribió el primer número (de tres cifras) cuál fue el número que él escribió que es el mismo que nos ha quedado.

Ejemplo 345

$\dfrac{345.345}{7} = 49.335$;

$\dfrac{49.335}{11} = 4.485$

SOLUCION

$\dfrac{4.485}{13} = 345$ (El número pensado)

Al poner el mismo número a la derecha es como multiplicar ese número por 1.001 (345.345 = 345 × 1.001) dividimos por 7, 11 y 13 Y $7 \times 11 \times 13 = 1.001$

Los diamantes son piedras preciosas formadas por carbono cristalizado, diáfano y de gran brillo y con una dureza tal que raya casi todos los cuerpos.

El quilate es su unidad de peso y equivale a 2oo miligramos. Recibe el nombre de brillante cuando está tallado completamente por el haz y el enves.

Esta piedra fue cotizada desde muy antiguo, floreciendo a partir del siglo XV el comercio y la talla de ellas.

En su valor final influyen varios factores: su peso, su color, su pureza y su nitidez que luego son realzados y embellecidos por una inteligente talla.

Los más valiosos son aquellos que carecen totalmente de color, llamados «River» (Río) y son. muy raros de hallar.

El lugar en que hoy día se encuentran los mejores tallistas del mundo es sin ninguna duda la ciudad de Amsterdam, al alcanzar tanta fema la pericia de estos tallistas, es natural que allí se tallaran los más famosos ejemplares, recuerden el Cullinan, el mayor diamante encontrado jamás de 3.032 quilates en bruto. Descubierto en 1905 en la región de Transvaal, también el Koh-i-Nohr (Montaña de Luz) que fue propiedad del Gran Mogol, luego del rey de Lahore y hoy día se encuentra en le colección de diementes de la corona de Inglaterra. Su peso en bruto ere de 800 quilates quedando reducido solemente a 279 quilates al ser tallado indebidamente.

El descubrimiento de diamantes en Sudáfrica en 1867 fue el inicio de su aplicación industrial que permite la utilizeción de los pequeños, defectuosos y hasta del polvo para realizar trabajos y operaciones variadísimas

5.—SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

El problema que nos ocupa, es que se puede dar el caso de que tengamos varias inecuaciones con la misma incógnita y que queramos localizar el conjunto de soluciones de la incógnita, que deben satisfacer simultáneamente a todas las inecuaciones propuestas.

Entre todas las inecuaciones, se forma un sistema de inecuaciones.

El planteamiento de cálculo que se sigue para obtener e conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones, consiste er resolver separadamente cada una de las inecuaciones del sistem: y el conjunto de soluciones que sean comunes a todas la: inecuaciones del sistema es el conjunto de soluciones del sistem: propiamente dicho.

Ej.: Resolver el sistema de inecuaciones:

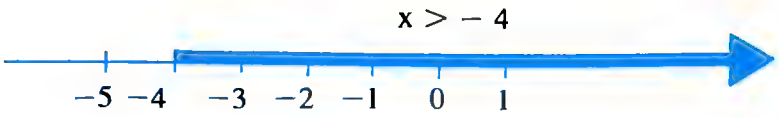
$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3 < 5x + 9 \\ 6x - 8 < 3x + 16 - 5x \end{array}\right\}$$

Resolvemos las dos inecuaciones del sistema independiente

En la primera inecuación:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< 5x + 9 \\ 2x - 5x &< 9 + 3 \\ -3x &< 12 \\ 3x &> -12 \\ x &> \frac{-12}{3} \\ x &> -4 \end{aligned}$$

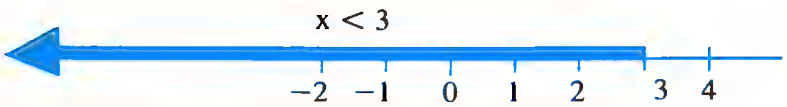
Gráficamente expuestas las soluciones de la primera inecuación.



En la segunda inecuación:

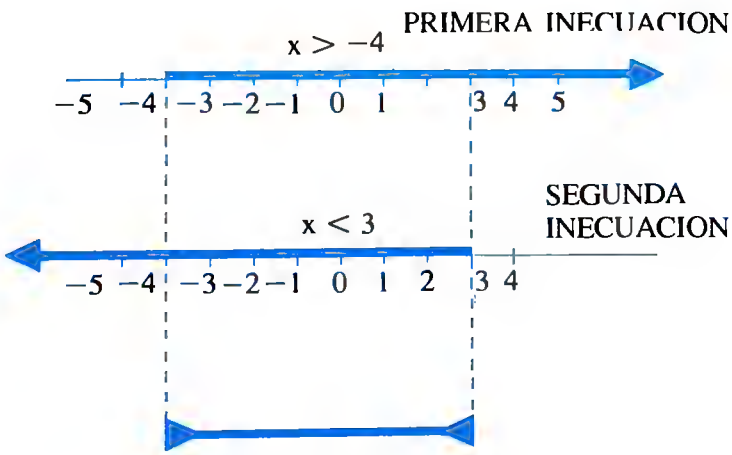
$$6x - 8 < 3x + 16 - 5x$$
$$6x - 3x + 5x < 8 + 16$$
$$8x < 24$$
$$x < \frac{24}{8}$$
$$x < 3$$

Gráficamente expuestas las soluciones de la segunda inecuación.



Pues bien, para localizar ahora las soluciones comunes a las dos inecuaciones, es decir, la solución del sistema de inecuaciones, lo que se debe hacer es solapar los dos gráficos de soluciones obtenidos de cada una de ellas.

La solución del sistema, es la zona común de las soluciones de ambas. Obsérvese:



$$-4 < x < 3$$

Ej.: Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x > 1 \\ x > 3 \end{array}\right\}$$

Como en este sistema no es necesario despejar incógnitas, ya que lo están, pasamos directamente a la representación gráfica de las soluciones.

Decidle a un amigo que escriba un número de cuatro cifras (ejemplo: 2748). Una vez escrito éste, que con estos mismos cuatro cifras escriba otro número con las mismas cifras, pero cambiadas de lugar.

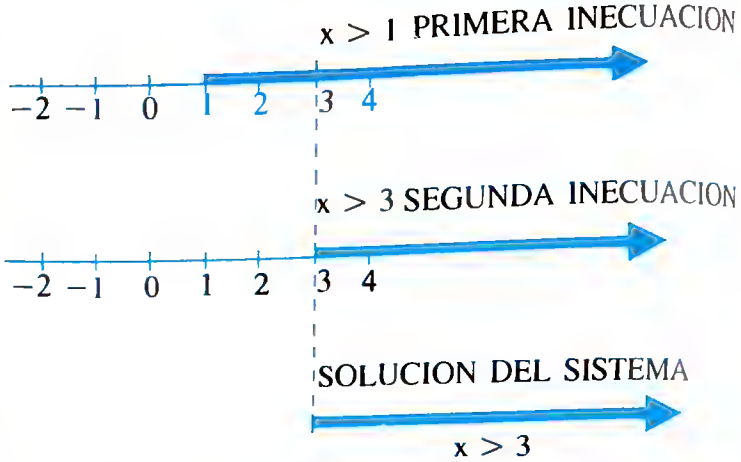
(8742) Restar el menor del mayor.

(8742 − 2748 = 5.994). Se tacha una de las cifras (9) se suman las otras tres 5 + 9 + 4 = 18. Se busca el número inmediato superior al resultado y que sea divisible por 9 (en este caso el 27). Así tendremos 27 − 18 = 9. Nueve es el número borrado. Borremos, por ejemplo, el 5 y así tendremos 9 + 9 + 4 = 22; de 22 a 27 ven 5, luego el cinco es el número borrado. Si es el 4 el borrado, tendremos la suma de los otros tres (5 + 9 + 9 = 23) De 23 a 27 van 4. Luego el cuatro es el número borrado. ¿Curioso verdad?

En el pueblo o ciudad donde vives, seguro que hay una iglesia, por lo menos, que sea monumento artístico. De esta iglesia tienes una postal con la fotografía de la misma.

¿Podrías con este dato saber la altura de esa iglesia?

Le solución en Pág. 352



Ej.: Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-5}{3} - \dfrac{x+5}{2} < 1 \\ \dfrac{x+2}{5} + \dfrac{x}{4} > \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Resolvemos las dos inecuaciones del sistema independientemente.

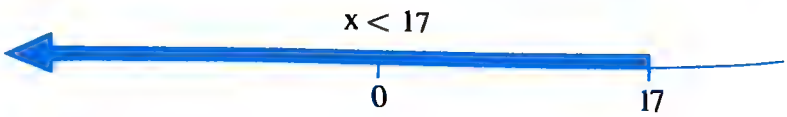
En la primera inecuación:

$$\frac{3x-5}{3} - \frac{x+5}{2} < 1$$

Eliminando denominadores por el m.c.m. (3,2) = 6

$$\begin{aligned} 2(3x-5) - 3(x+5) &< 6 \cdot 1 \\ 6x - 30 - 3x - 15 &< 6 \\ 6x - 3x &< 6 + 30 + 15 \\ 3x &< 51 \\ x &< \frac{51}{3} \\ x &< 17 \end{aligned}$$

Gráficamente expuestas las soluciones de la primera inecuación.



En la segunda inecuación:

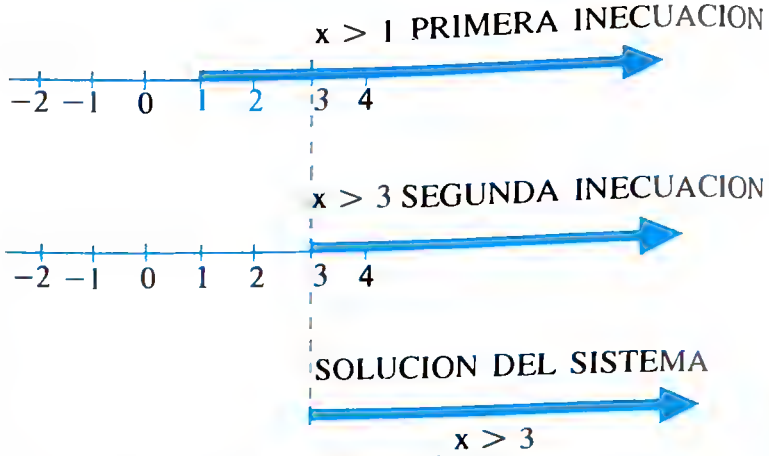
$$\frac{x+2}{5} + \frac{x}{4} > \frac{1}{2} \text{ ; m.c.m. } (5, 4, 2) = 20$$

$$\begin{aligned} 4(x+2) + 5x &> 10 \cdot 1 \\ 4x + 8 + 5x &> 10 \\ 4x + 5x &> 10 - 8 \\ 9x &> 2 \\ x &> \frac{2}{9} \end{aligned}$$

En el pueblo o ciudad donde vives, seguro que hay una iglesia, por lo menos, que sea monumento artístico. De esta iglesia tienes una postal con la fotografía de la misma.

¿Podrías con este dato saber la altura de esa iglesia?

La solución en Pág. 352



Ej.: Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-5}{3} - \dfrac{x+5}{2} < 1 \\ \dfrac{x+2}{5} + \dfrac{x}{4} > \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Resolvemos las dos inecuaciones del sistema independientemente.

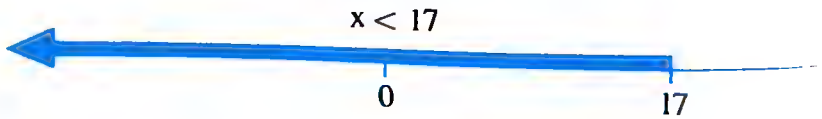
En la primera inecuación:

$$\frac{3x-5}{3} - \frac{x+5}{2} < 1$$

Eliminando denominadores por el m.c.m. $(3,2) = 6$

$$\begin{aligned} 2(3x-5) - 3(x+5) &< 6 \cdot 1 \\ 6x - 30 - 3x - 15 &< 6 \\ 6x - 3x &< 6 + 30 + 15 \\ 3x &< 51 \\ x &< \frac{51}{3} \\ x &< 17 \end{aligned}$$

Gráficamente expuestas las soluciones de la primera inecuación.

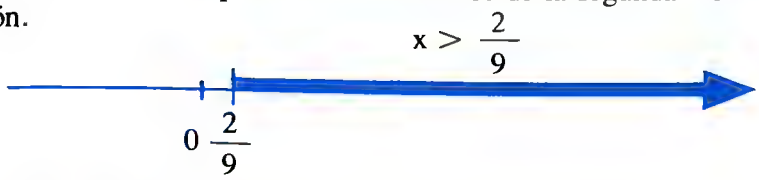


En la segunda inecuación:

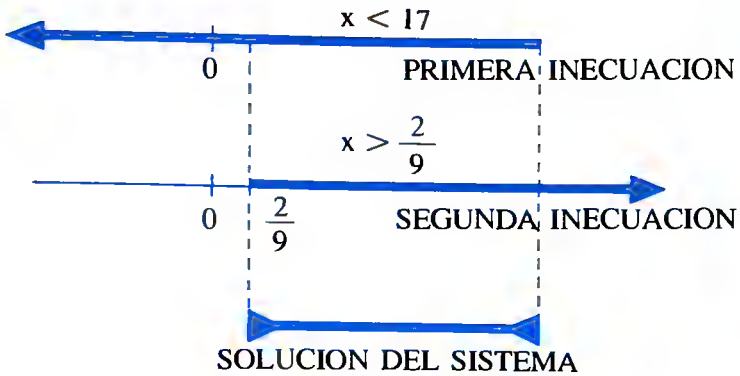
$$\frac{x+2}{5} + \frac{x}{4} > \frac{1}{2} \text{ ; m.c.m. } (5, 4, 2) = 20$$

$$\begin{aligned} 4(x+2) + 5x &> 10 \cdot 1 \\ 4x + 8 + 5x &> 10 \\ 4x + 5x &> 10 - 8 \\ 9x &> 2 \\ x &> \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Gráficamente expuestas las soluciones de la segunda inecuación.



Pues bien, las soluciones del sistema son las soluciones comunes a ambas inecuaciones.

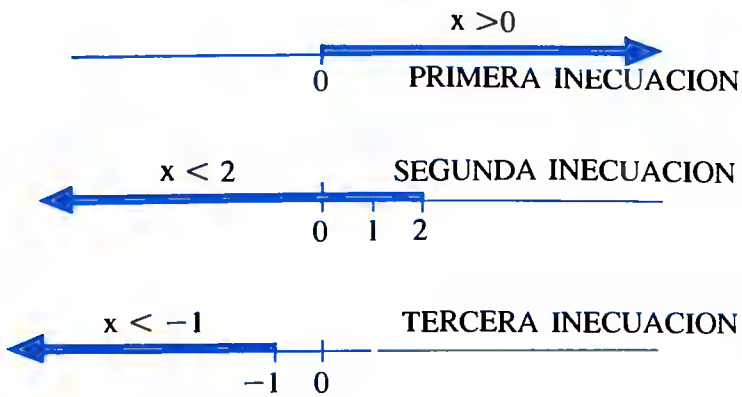


$$17 > x > \frac{2}{9}$$

Ej.: Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x < 2 \\ x < -1 \end{array}\right\}$$

Como ya están despejadas las incógnitas en las inecuaciones plasmamos en un gráfico sus soluciones:



El sistema de inecuaciones no posee soluciones, ya que como se observa en el gráfico no existe ninguna zona de soluciones de cada inecuación que sea común a las tres a la vez.

INSPIRACION MENTAL

Existe una curiosa anécdota en la que un profesor de psicología pretendía estudiar el sistema de inspiración o inteligencia de los chimpancés para resolver problemas.

Después de colocar en el techo de una habitación un plátano y de forma que el animal no lo pudiera alcanzar, se bajó de la escalera e hizo entrar al animal objeto de su estudio, no sin antes, retirar la escalera. Puso en un rincón de la habitación cajas apiladas con el fin de probar el método deductivo del animal. El chimpance no hacia más que mirar intranquilo al plátano, miraba a las cajas, miraba al profesor; no reaccionaba. El profesor, queriendo simplificarle el trabajo, tomó una caja para ponerla en el centro de la habitación e indicarle al animal el método a seguir. Cuál no sería su sorpresa que cuando dicho profesor pasaba con su caja por el centro de la habitación el chimpancé dio un salto y se puso sobre los hombros del profesor y rápidamente con otro salto... cogió el plátano.

Esto nos enseña que cuando queremos resolver un problema desde un punto de vista, existe la solución por otro conducto más cómodo.

Hace cien años los sabios suponían que la tierre era un cuerpo formado por una corteza dura bajo la cual había una capa rocosa muy caliente, debejo de esta capa estaba el núcleo, formado por una masa en fusión. Eran muchos los que apoyaben esta teoría, se había comprobado que al descender a cierta profundidad le temperatura aumenta rápidamente, en las minas de oro de Africa del Sur, algunas con profundidades superiores a los 2.500 m. la temperatura alcanza los 100° centígrados.

Un segundo factor, son los volcanes, la roca fundida y la lava que lanzan tiene una temperatura superior a los 4.000°.

Ahora que los vulcanólogos emplean nuevos instrumentos, con el sismógrafo han comprobado que el núcleo central tiene que ser necesariamente sólido. La presión en el centro de la tierra se eleva a 3.500.000 Kg./cm. Aunque sigue desconociéndose la naturaleza exacta del núcleo, los estudios han permitido determinar la estructura de una perte del interior del planeta.

Los más profundos terremotos han ocurrido e 725 Kms. de la superficie; por consiguiente a esa profundidad existe una cape de materia sólida. Por la conducta de las ondas sísmicas, se sabe que la corteza exterior llega hasta los 695 Kms. de profundidad, debajo de ella hay otra capa de 65 Kms. formada principalmente de granito, bajo ésta hay otra capa intermedia de 1.800 Kms. de espesor y por fin un núcleo de 7.100 Kms. cuya naturaleza exacta es desconocida todavía.

6.— INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS.

Para resolver este tipo de inecuaciones, la forma fundamentalmente más cómoda es recurrir a su expresión gráfica. Para ello deberemos de recordar y hacer uso de cómo se representaba gráficamente una ecuación de primer grado con dos incógnitas (ya expuesto detalladamente en el tema de ecuaciones. Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado).

Pues bien, el proceso a seguir, consiste en sustituir en la inecuación el signo $<$ por el signo $=$ transformando así la inecuación en una ecuación. A continuación se dibuja en el plano, la recta correspondiente a la ecuación obteniendo previamente dos puntos de ella. Esta recta partirá al plano coordenado en dos semiplanos.

Recordemos que cada punto de la recta se obtiene dando cualquier valor a una de las incógnitas y obteniendo el correspondiente a la otra incógnita, mediante la relación de la ecuación.

Una vez dibujada la recta que va actuar como frontera entre los valores que cumplen o no cumplen la inecuación, se elige, de un lado o de otro de ésta un punto cualquiera como comprobación (si la recta no pasa por el origen de coordenadas, suele ser muy cómodo, elegir precisamente el origen) y se sustituye en la inecuación propuesta. Si este punto elegido satisface a la inecuación es que la zona o semiplano donde está el punto en cuestión, es la zona donde se encuentran el conjunto de soluciones de la inecuación.

Si el punto elegido no satisface a la inecuación, es que la zona o semiplano donde está el punto en cuestión no es la zona donde se encuentran el conjunto de soluciones de la inecuación, es decir, es este caso las soluciones estarían en el otro semiplano, ya que la recta dibujada actúa de frontera entre las soluciones y las no soluciones de la inecuación (un semiplano excluye al otro a la hora de localizar las soluciones).

Ej.: Resolver la inecuación: $x + y < 5$

Transformamos la inecuación en ecuación, sustituyendo el signo $<$ por el signo $=$

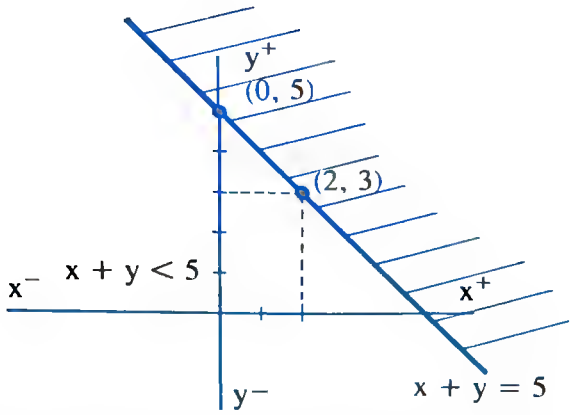
$(x + y = 5)$

A continuación dibujamos la recta $x + y = 5$ localizando previamente dos puntos de ella, mediante la tabla siguiente:

$x + y = 5$

x	y		PUNTOS
0	5	$(0 + y) = 5 \rightarrow$	(0,5)
2	3	$(2 + y) = 5 \rightarrow$	(2,3)

Dibujamos en coordenadas cartesianas los dos puntos y consecuentemente la recta.



Para localizar el semiplano o de qué lado de la recta $x + y = 5$ están las soluciones de la inecuación propuesta, elegimos cualquier punto del plano. Por ejemplo el (0,0) por comodidad y lo sustituimos en la inecuación, para ver si la satisface:

$x + y < 5 \rightarrow 0 + 0 < 5 \rightarrow 0 < 5$ (sí satisface)

Efectivamente la satisface, luego el lado de la recta donde están las soluciones es el lado donde está el punto elegido.

El otro lado de la recta que no corresponde al semiplano de soluciones se raya, eliminándolo.

Cualquier punto que esté en la zona no rayada (téngase en cuenta que todos los puntos tienen un valor de x y otro de y) satisface la inecuación y se considerará como solución de ella (una solución de las infinitas que tiene la inecuación).

Ej.: Resolver la inecuación: $x + 2y > 4$

Dibujamos la recta: $x + 2y = 4$

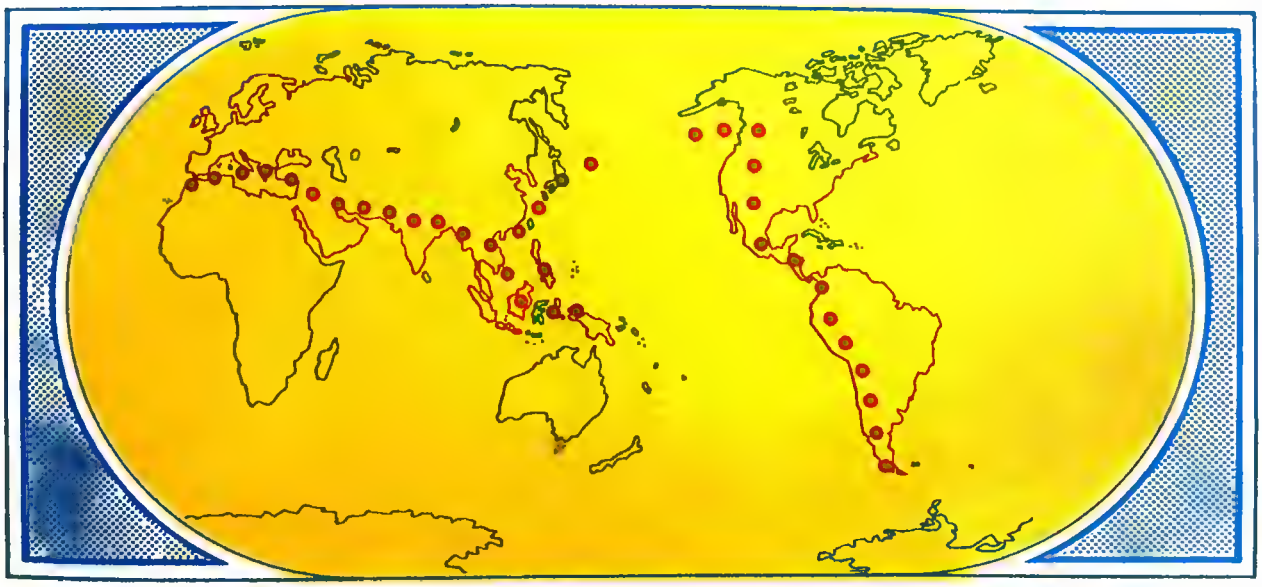
$x + 2y = 4$

x	y		PUNTOS
0	2	$(0 + 2y = 4) \rightarrow$	(0,2)
4	0	$(x + 2 \cdot 0 = 4) \rightarrow$	(4,0)

FENOMENOS TERRESTRES. VOLCANES

El «Magma», es la materia que existe debajo del casco de la corteza terrestre. Este magma está sometido a elevadísimas temperaturas y presiones. Cuando se altera esa temperatura y presión y facilitando la fusión de esa materia y los gases que la contienen, buscan inmediatamente expansión o salida, formando el llamado «cono volcánico» en cuya cima forma una cavidad llamada «cráter». Por dicha cavidad son arrojados al exterior gases y «magma» fundido y a miles de grados de temperatura formando lo que se llama una «lava», deslizándose.

Existe una zona de volcanes que puede ser representada gráficamente y que abarca: desde el Norte de Africa hacia Italia, Grecia, Turquía, Norte de la India, Birmania, Tailandia, Camboya, Indonesia, Nueva Guinea, subiendo desde ahí a Samoa, Java, Filipinas, Japón, Mar de Bering, cruzando a Estados Unidos en la costa del Oceano Pacífico, la cinta de las Montañas Rocosas, Méjico, América Central, América del Sur (Colombia, Perú y Chile) hasta el estrecho de Magallanes.



El ingenioso hidalgo D. Quijote de la Mancha es sin lugar a dudas la obra cumbre de la literatura española. Es el libro más traducido y del que se han hecho más ediciones después de la Biblia.

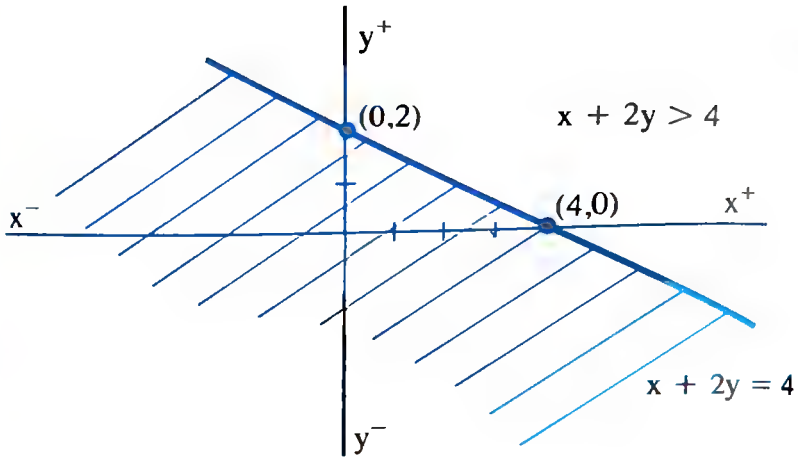
La novela fue escrita en dos partes, la primera publicada en 1605 dedicada al Duque de Béjar, la segunda en 1615 dedicada al Conde de Lemos. La más antigua edición conocida fue publicada por Juan de la Cuesta en Madrid, se cree que en 1604, esta edición de la que no se conoce ningún ejemplar pero que es citada por otros escritores contemporáneos sería seguramente de muy corta tirada. Ante su éxito se procedió a imprimir en febrero de 1605 varios millares, considerando esta edición la número uno, gran parte de ésta se envió a América.

Este mismo año 1605 se hicieron otra segunda edición en Juan de la Cuesta y cuatro fuera de ella.

Dos en Lisboa sin autorización y dos debidamente autorizadas en Valencia. En 1607 sa publica en Bruselas y en 1608 lo vuelve a imprimir Juan de la Cuesta en Madrid.

La segunda parte de mayor valor literario y una mayor profundidad moral y psicológica se imprimió también en la Imprenta de Juan de la Cuesta en 1615 poniéndose a la venta probablemente a finales de año, unos cinco meses antes de la muerte de Cervantes.

Continúa en la página siguiente.



Eligiendo el punto (0,0) para comprobar:

$x + 2y > 4 \rightarrow 0 + 2 \cdot 0 > 4 \rightarrow 0 \not> 4$ (no satisface)

Luego el conjunto de soluciones está en el otro semiplano donde no está el (0,0).

7.—SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS.

Para resolver estos sistemas se tratan separadamente cada una de las inecuaciones y la zona que no quede rayada en ambas es donde se encuentran el conjunto de soluciones del sistema, que por supuesto verificarán simultáneamente las dos inecuaciones del sistema (no se plantearán sistemas de más de dos inecuaciones por lo complejo que sería trasladar estas ideas de un sistema plano a un sistema espacial).

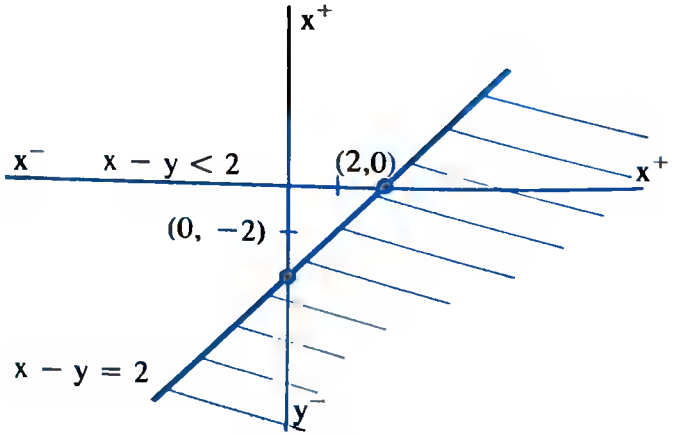
Ej.: Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - y < 2 \\ x + y > 3 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la primera inecuación $x - y < 2$:

$x - y = 2$

x	y		PUNTOS
0	− 2	$(0 - y = 2) \rightarrow$	(0, − 2)
2	0	$(x - 0 = 2) \rightarrow$	(2,0)



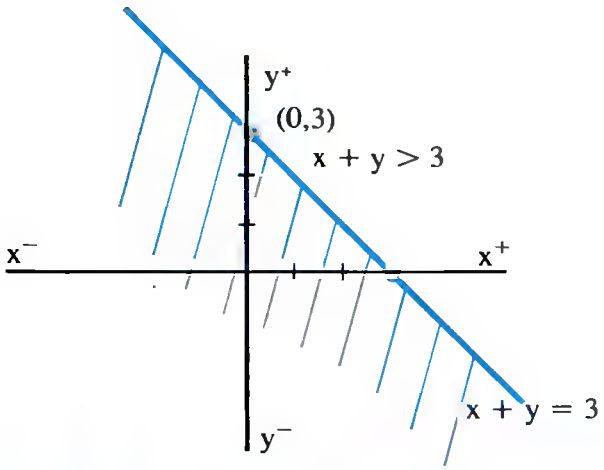
Comprobamos con el punto (0,0)

$x - y < 2 \rightarrow 0 - 0 < 2 \rightarrow 0 < 2$ (sí satisface)

Dibujamos la segunda inecuación $x + y > 3$

$x + y = 3$

x	y		PUNTOS
0	3	$(0 + y = 3) \rightarrow$	(0,3)
3	0	$(x + 0 = 3) \rightarrow$	(3,0)



Viene de la página anterior.

El éxito inicial se ha mantenido de forma continuada. En español se hicieron unas treinta ediciones en el siglo XVII, unas cuarenta en el siglo XVIII, unas doscientas en el siglo XIX y en lo que va del siglo XX un promedio de tres ediciones al año.

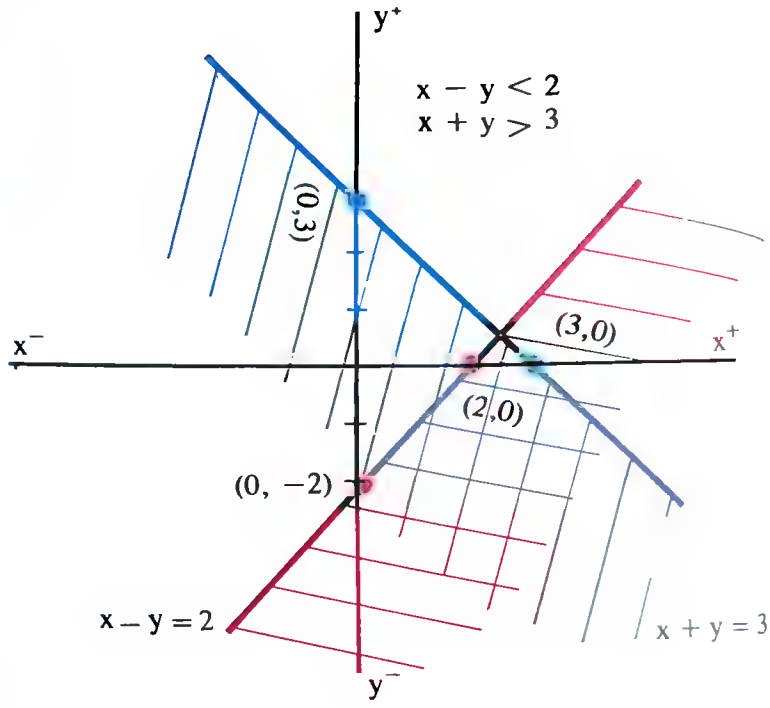
La primera traducción al inglés fue en 1612 la primera parte y en 1620 la segunda. Por estas fechas se hicieron también las primeras traducciones al francés, italiano, alemán, holandés, danés, ruso, etc.

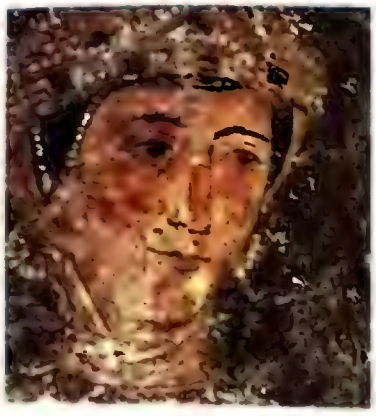
Hoy día no existe lengua ni dialecto susceptible de escritura impresa al que no esté traducido.

Comprobamos con el punto (0,0)

$x + y > 3 \rightarrow 0 + 0 > 3 \rightarrow 0 \not> 3$ (no satisface)

Pues bien, para ver las soluciones del sistema, vamos a unir las dos gráficas obtenidas, y la zona que quede no rayada, corresponderá a las soluciones del sistema de inecuaciones.





En un antiguo manuscrito latino, se cuenta la siguiente leyenda:

El jefe militar Terencio después de muchos años de gloriosas campañas militares victoriosas y de haber entregado al emperador de Roma enormes *botines* de guerra y riquezas sin límite, se encontraba ya viejo y pobre. Toda su vida la había dedicado al engrandecimiento, gloria y riqueza de Roma y del Emperador.

El Emperador quiso darle un puesto en el Senado, que Terencio rechazó, ya que él estaba hecho para la guerra y sus dotes oratorias eran nulas y además ni entendía ni le gustaba la política. Terencio sólo quería descansar y asegurarse su vejez necesitando, por ejemplo... un millón de denarios.

Al Emperador se le distinguía por su avaricia sin límites y por su escasa esplendidez. Le dijo a Terencio.

Te voy a recompensar con largueza y con todo lo que tu puedas. El primer día, o sea mañana, te daré un *bras* de cobre (la quinta parte de un denario y de cinco gramos de peso); el segundo día te daré una moneda doble que la anterior; al tercer día doble también que la del día anterior, y así sucesivamente y no te preocupes que cuando tu vengas a recoger tu moneda la tendrés fabricada a su medida y especial para tí; pero, la tendrás siempre que tomar tú solo sin ayuda de nada ni de nadie, con la sola ayuda de tus propias manos.

Terencio aceptó la oferta. En los primeros días no hubo ningún tipo de problema, pero éste llegó al día número 15. Veamos

el 1 día	1 bras	peso	5 gr y 20 mm de diámetro
el 2.° día	2 bras	peso	10 gr y 30 mm de diámetro
el 3.° día	4 bras	peso	20 gr y 40 mm de diámetro
el 4.° día	8 bras	peso	40 gr y 50 mm de diámetro
el 5.° día	16 bras	peso	80 gr y 60 mm de diámetro
el 6.° día	32 bras	peso	160 gr y 70 mm de diámetro
el 7.° día	64 bras	peso	320 gr y 80 mm de diámetro (8 cm)
el 8.° día	128 bras	peso	1.280 (1 Kg, 280 gr) 120 mm (12 cm)
el 10.° día	512 bras	peso	2 Kg, 120 gr, 26 cm
el 11.° día	1.024 bras	peso	5 Kg, 120 gr, 26 cm
el 12.° día	2.048 bras	peso	10 Kg, 240 gr, 28 cm
el 13.° día	4.096 bras	peso	20 kg, 480 gr, 30 cm
el 14.° día	8.192 bras	peso	40 Kg, 960 gr, 40 cm
el 15.° día	16.384 bras	peso	81 Kg, 920 gr, 50 cm
el 16.° día	32.768 bras	peso	163 Kg, 840 gr, 60 cm

Terencio había pedido al emperador un millón de denarios; como cinco bras equivalen, a un denario tenemos;

32.768 : 5 = 6.554 denarios (por exceso)

$\frac{1.000.000}{6.554}$ = 152,57 veces menos que la suma perdida.

MORALEJA: La fuerza de la inteligencia es siempre mayor que la fuerza humana.

8.—INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Son aquellas en las que la expresión que forma parte de la inecuación se presenta como un polinomio de segundo grado con una incógnita.

Para resolverlas, como es general en las inecuaciones, utilizaremos el sistema gráfico, representado en este caso por un eje, que contenga a todos los números reales (lo mismo que en las inecuaciones de primer grado con una incógnita).

Este eje va a estar dividido en zonas o regiones, cuyas fronteras van a ser las soluciones de la ecuación de segundo grado propuesto.

Es decir, para resolver una inecuación de segundo grado, seguiremos los siguientes pasos:

a) Sustituiremos el signo $<$ de la inecuación por el signo $=$ transformando la inecuación en una ecuación.

b) Localizaremos las soluciones de la ecuación, soluciones que van a ser los valores que van a actuar de frontera para las distintas regiones en las que quede dividido el eje.

Dependiendo de la naturaleza que tengan las soluciones de la ecuación, la división en regiones del eje, se manifestará de una forma u otra (la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado, es detectada por el discriminante de la ecuación, como ya se expuso en tema anterior).

Si el discriminante de la ecuación de segundo grado es mayor que cero ($b^2 - 4ac > 0$) la ecuación tiene dos soluciones reales x_1 y x_2.

Siempre existen soluciones y el eje quedará dividido en tres regiones.

Si el discriminante es igual a cero ($b^2 - 4ac = 0$) la ecuación posee dos soluciones iguales $x_1 = x_2$.

En este caso puede ocurrir que no existan soluciones y si existen cualquier valor real del eje $x \neq x_1 = x_2$ es solución y únicamente existirá una sola región que será todo el eje.

Si el discriminante es menor que cero ($b^2 - 4ac < 0$) la ecuación posee dos soluciones complejas.

Los escritos de la antigüedad es cierto que nos transmitieron los sucesos ocurridos en aquellos tiempos pero también lo es, que los escritores parece que se dejaban llevar por la fantasía.

Hoy día se duda de la larga duración de los sitios a que se sometía a las ciudades, así parecen exagerados, el sitio de Troya diez años, y de el Azoto en Siria veintinueve años, también son curiosas las estratagemas de que se valían los sitiados para hacer creer al enemigo que tenían sus almacenes de alimentos llenos. En Priene, el filósofo Biante mandó sacar fuera de la ciudad mulos gordos y lustrosos y desalentaron a los sitiadores, y en el interior formaron grandes montones de arena que cubrieron de una delgada capa de grano. También los romanos sitiados en Campidoglio, lenzaban panes a los galos para demostrarles la abundancia que disfrutaban. En Casilino vio Aníbal cómo los sitiados sembraban nabos alrededor de la muralla e interpretó que tendría que esperar mucho tiempo, levantando el cerco.

PRIMER VIAJE DE COLON

Los polos magnéticos de la tierra no coinciden con los polos geográficos. La aguja de la brújula nunca señala la dirección exacta de N. o de S., siempre se desvía hacia E. u O. Ese ángulo que se forma entre el polo geográfico y el megnético, se llama «ángulo de declinación».

En el diario de a bordo de la carabela «Santa María» (en ella precisamente iba el Almirante), se encontró una anotación de este hecho anterior.

La brújula en vez de señalar hacia el Norte geográfico tenía una «declinación» hacia Poniente y unas oscilaciones. Los marinos, teniendo fe ciega en la brújula empezaron al principio a desconfiar, para después creer en una situación maléfica para que las carabelas no alcanzaran el «fin del mundo». Su excitación llegó casi hasta el motín:

Conocedor Colón de esta circunstancia de la «declinación», una noche, cuando todos dormían, giró la rosa de los vientos hasta que la declinación de la aguja volvió a ser normal. La confianza de la tripulación y la tensión aminoró.

En este caso puede ocurrir que no existan soluciones y si existen, cualquier valor real del eje es solución y únicamente existirá una sola región que será todo el eje.

c) Una vez hemos obtenido los valores frontera que van a limitar las regiones, volveremos a la inecuación propuesta y comprobamos en ésta un valor cualquiera de cada región, observando si satisface o no satisface a la inecuación.

Si el valor comprobado en la inecuación la satisface, es que cualquier valor de esa región es solución de la inecuación.

Si el valor comprobado no satisface la inecuación, es que ningún valor de la región estudiada es solución de la inecuación.

Es corriente también, efectuar estas comprobaciones, con la inecuación de segundo grado descompuesta en producto (aplicación de la tercera forma general de la ecuación de segundo grado) ya que los datos necesarios para tal descomposición los tenemos que obtener necesariamente; las raíces de la ecuación de segundo grado que forma parte de la inecuación.

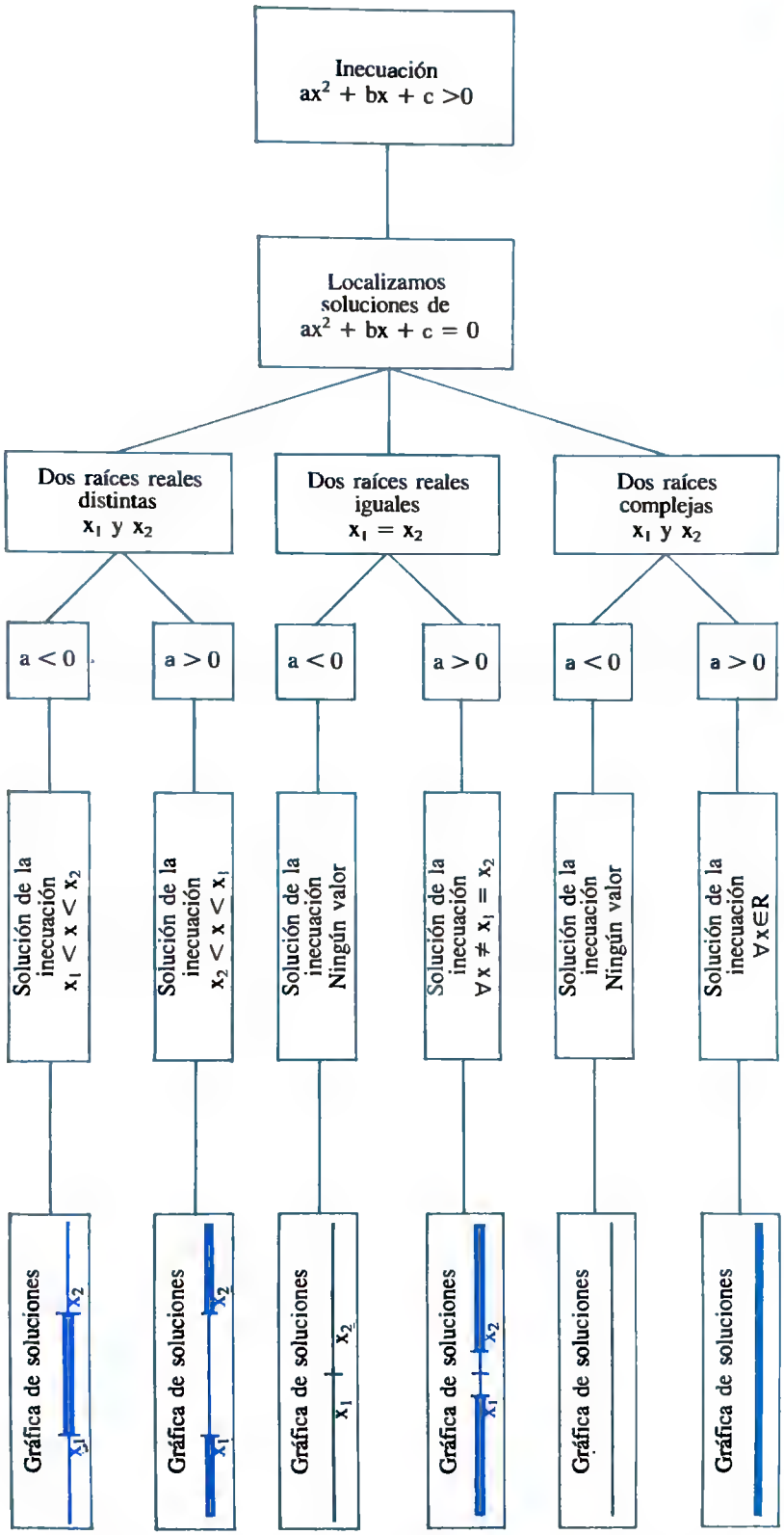
$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$$
$$a(x - x_1)(x - x_2) \lesseqgtr 0$$

Observando en esta descomposición en producto, qué sentido toma la inecuación para cualquier valor a comprobar de cualquier región en que queda dividido el eje con las soluciones x_1 y x_2 de la ecuación.

NOTA.— Cuando una inecuación de segundo grado posea denominadores habrá que tener exquisito cuidado a la hora de eliminarlos, ya que al multiplicar o dividir a los dos miembros de éstas por expresiones que contengan a la incógnita, no sabemos por ser desconocida la incógnita, si estamos multiplicando la inecuación por un número positivo o negativo (asunto que es decisivo para cambiar o no el sentido de la inecuación), por ello siempre multiplicaremos la inecuación para eliminar denominadores por la expresión donde esté la incógnita al cuadrado, hecho que descarta la posibilidad de que estemos multiplicando por un número negativo y consecuentemente que cambie el sentido de la desigualdad.

Los denominadores cuando posean incógnita no se deben eliminar en las inecuaciones, al contrario que en las ecuaciones, sino dejándole como denominador común, previa transposición de todos los términos a un miembro.

d) Esquema de cálculo.



NOTA.— Cuando la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$ tenga el sentido del signo de la desigualdad cambiado (> por <) se sigue pudiendo aplicar la tabla anterior, sin más que multiplicar la desigualdad por − 1 o cambiarla simplemente de signo (ya se ha dicho que cuando se cambia de signo una desigualdad ésta cambia su sentido).

Muchas veces, las matemáticas y los problemas no los vemos de inmediato; no desaniméis, tener constancia y darle vueltas hasta encontrar la solución. Cuando os acostumbréis a esto veréis que la chispa de solución de los problemas no viene rápidamente. Un profesor cuando resuelve los problemas, en el 80 % de los casos, es por la costumbre que tiene para hacerlos, ya que está practicando todos los días, el otro 20 % solamente es por lo que sabe de ellos. Todo se adquiere en la práctica. Tenéis el ejemplo más importante en Einstein, alumno más bien mediocre que cuando terminó los estudios fue cuando se aficionó a las matemáticas y a la física, hasta tal punto que decía, que si él hubiera practicado más de estudiante hubiera sacado las notas más altas que jamás se hubieran imaginado. Revolucionó la física, hasta tal punto, que con sus teorías la puso boca abajo. Más adelante rubricó esta materia con su «Teoría de la Relatividad».

Una señora, acompañada de sus tres hijos, va de compras a unos grandes almacenes. Al pasar junto a una gran máquina de cristal, que tiene dentro caramelos de naranja y de limón, a sus tres hijos se les ha antojado los caramelitos. Menos mal que al segundo de los niños se le ha ocurrido querer un caramelo igual al de su hermano mayor, y claro al tercero otro igual al de sus hermanos. Tiene que depositar en la maquinita una moneda de peseta para cada dulce que saque. Se pide ¿cuál es la mínima cantidad de dinaro que la buena señora tendrá que gastar para satisfacer a sus trea hijos?

La solución en Pág. 368

•Ej.: Resolver la inecuación: $x^2 - 4x - 5 < 0$

Transformamos la inecuación en ecuación.

$x^2 - 4x - 5 = 0$

Localizamos las soluciones de la ecuación.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix}$$

Estas soluciones 5 y − 1 son los valores frontera que van a dividir al eje en regiones.

Para localizar las regiones que satisfacen a la inecuación propuesta $x^2 - 4x - 5 < 0$, comprobamos un valor de cada región:

REGION	VALOR ELEGIDO
I	− 2
II	0
III	6

COMPROBACION EN $x^2 - 4x - 5 < 0$

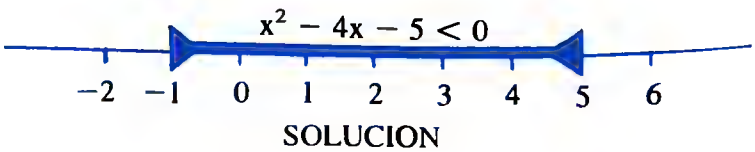
$(-2)^2 - 4(-2) - 5 < 0 \rightarrow 4 + 8 - 5 < 0 \rightarrow 7 \not< 0$ (no satisface)

$0^2 - 4 \cdot 0 - 5 < 0 \rightarrow 0 - 0 - 5 < 0 \rightarrow -5 < 0$ (satisface)

$6^2 - 4 \cdot 6 - 5 < 0 \rightarrow 36 - 24 - 5 < 0 \rightarrow 7 <$ (no satisface)

Luego definitivamente el conjunto de valores correspondientes a la REGION II es el que satisface a la inecuación.

Gráficamente representadas las soluciones.



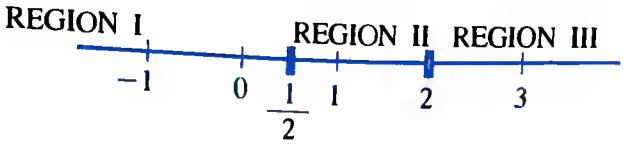
SOLUCION

Ej.: Resolver la inecuación: $2x^2 - 5x + 2 > 0$

Resolvemos la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Dividimos en regiones el eje:



Comprobamos valores en cada región.

REGION	VALOR ELEGIDO
I	0
II	1
III	3

COMPROBACION EN $2x^2 - 5x + 2 > 0$

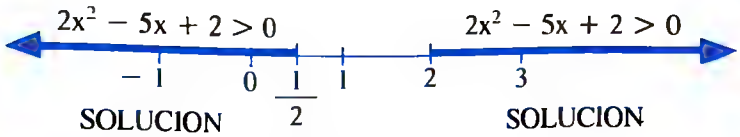
$2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow 0 - 0 + 2 > 0 \rightarrow 2 > 0$ (satisface)

$2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 > 0 \rightarrow 2 - 5 + 2 > 0 \rightarrow -5 \not> 0$ (no satisface)

$2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow 18 - 15 + 2 > 0 \rightarrow 5 > 0$ (satisface)

Luego las soluciones están en la REGION I Y III.

Gráficamente representadas:



Ej.: Resolver la inecuación: $x^2 - 6x + 11 < 2$

Preparamos la inecuación, transponiendo términos.

$x^2 - 6x + 11 < 2 \rightarrow x^2 - 6x + 11 - 2 < 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 < 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

Dividimos el eje en regiones.

Comprobamos valores en el eje como única región.

REGION	VALOR ELEGIDO
EJE	0

COMPROBACION EN $x^2 - 6x + 9 < 0$

$0^2 - 6 \cdot 0 + 9 < 0 \rightarrow 0 - 0 + 9 < 0 \rightarrow 9 \not< 0$ (no satisface)

Luego la inecuación no posee soluciones.

Como ejemplo de números interminables, vemos que el número de átomos que caben en media cáscara de nuez sería aproximadamente 10^{25}. Muchísimo más pequeños que los átomoa son los electrones. El número de electrones que pasan a través de un filamento de una bombilla eléctrica de por ejemplo 60 watios durante un minuto, es muchísimo mayor que todaa las gotes de agua que puedan contener todos los ríoa españoles durante un siglo. ¿Y si pensáramoa en el número de electrones contenidos no sólo en el filemento sino en toda la ciudad? ¿Y en toda la Tierra? ¿Y en todo el Universo? Así pues, vemos que los números por muy grandes que sean, no es fácil llegar al... *número último.*

Los sistemas de comprobación para verificar la exactitud de los productos que nos ofrece la industria alcanzan cotas de seguridad altísimas, así los rayos X empleados en la comprobación final de las pelotas de golf aseguran que el núcleo está perfectamente centrado, de no ser así la pelota se desviará al saltar por los aires, todas las piezas importantes de los aviones y astronaves son sometidas a una inspección de este tipo para asegurar su perfecto acabado.

También fueron empleados los rayos X para examinar alhajas de gran valor, un collar de perlas considerado como perfecto tenía en realidad dos perlas de cultivo, que mezcladas con las naturales no podían distinguirse a simple vista. Comprobadas, su dibujo interior mostraba claramente las innumerables capas concéntricas segregadas al cabo de los años por la ostra mientras que la otra mostraba claramente un núcleo sólido y delgadas capas que lo cubrían.

En los museos los rayos X han demostrado la falsedad de algunos cuadros atribuidos a famosos pintores ya desaparecidos.

Ej.: Resolver la inecuación: $x^2 - 2x + 5 > 0$

Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\,\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

Comprobamos valores en el eje como única región.

REGION EJE	VALOR ELEGIDO
	0

COMPROBACION EN $x^2 - 2x + 5 > 0$

$0^2 - 2 \cdot 0 + 5 > 0 \rightarrow 0 - 0 + 5 > 0 \rightarrow 5 > 0$ (satisface)

Luego cualquier valor real del eje es solución de la inecuación.

Ej.: Resolver la inecuación $\frac{5(x^2 + 1)}{2} < x^2 + \frac{3}{4}$

Eliminamos denominadores para obtener la ecuación de segundo grado reducida M.C.M. $(2,4) = 4$

$$2 \cdot 5\ (x^2 + 1) < 4x^2 + 3 \cdot 1$$
$$10x^2 + 10 < 4x^2 + 3$$
$$10x^2 - 4x^2 + 10 - 3 < 0$$
$$6x^2 + 7 < 0$$

Aplicando en este caso el esquema de cálculo, seguiremos el siguiente proceso (previa adaptación del sentido de la desigualdad a las exigencias del cuadro). $-6x^2 - 7 > 0$

$-6x^2 - 7 = 0 \rightarrow$ Soluciones complejas $\rightarrow a = -6 < 0 \rightarrow$ ninguna solución.

Ej.: Resolver la inecuación: $\frac{x - 2}{x + 1} - 3 > 0$

— Primer procedimiento.

Eliminamos denominadores, teniendo en cuenta que éste es $x + 1$, y como no conocemos el valor de x, pudiera darse el caso de que $x + 1$ fuese negativo y no nos diésemos cuenta de que estábamos multiplicando la desigualdad por un número negativo que cambiaría su sentido, por esa razón se multiplica la inecuación por $(x + 1)^2$ que con seguridad sabemos va a ser positivo al estar elevado $x + 1$ a exponente par.

$$\frac{(x+1)^2(x-2)}{x+1} - 3(x+1)^2 > 0$$

$$(x+1)(x-2) - 3(x+1)^2 > 0$$
$$x^2 - 2x + x - 2 - 3(x^2 + 1 + 2x) > 0$$
$$x^2 - 2x + x - 2 - 3x^2 - 3 - 6x > 0$$
$$-2x^2 - 7x - 5 > 0$$

Mediante el esquema de cálculo propuesto en la teoría:

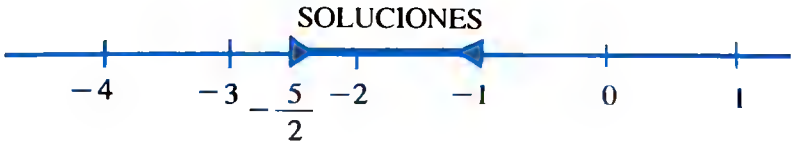
$$-2x^2 - 7x - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$-2x^2 - 7x - 5 = 0 \rightarrow \text{Dos soluciones Reales distintas} \rightarrow a < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Soluciones } -\frac{5}{2} < x < -1$$

Gráficamente expuestas:



— Segundo procedimiento.

Se basa en hacer un estudio independiente del numerador y denominador de la inecuación, logrando previamente un denominador común.

$$\frac{x-2}{x+1} - 3 > 0 \Rightarrow \frac{x - 2 - 3(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\frac{x - 2 - 3x - 3}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-2x - 5}{x+1} > 0$$

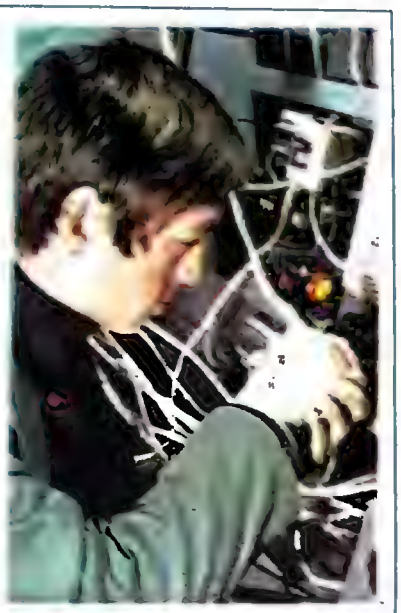
Como la inecuación nos indica que la fracción debe ser positiva (mayor que cero), con este criterio iniciamos la discusión.

Para que el numerador $-2x - 5$ sea mayor que cero, debe ocurrir que:

$$-2x - 5 = 0;\ x = -\frac{5}{2} \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$$

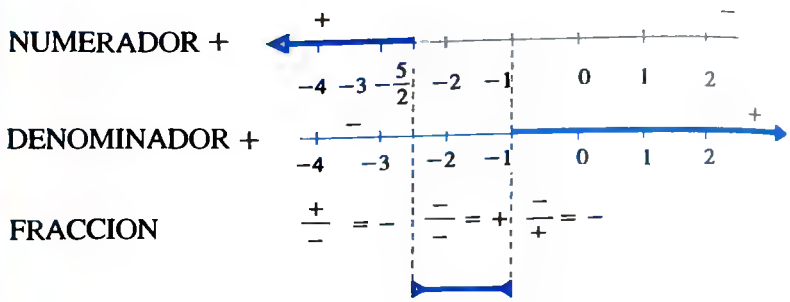
Para que el denominador sea mayor que cero, debe ocurrir que:

$$x + 1 = 0;\ x = -1 \Rightarrow x > -1$$



El aficionado a los problemas de matemáticas, no necesita ser un gran conocedor de esta materia; con conocimientos generales de todos los temas le basta. El aficionado, tiene eso sí, que tener una capacidad y una rapidez de inventiva enorme. Esta rapidez y esta capacidad, es la que yo quiero inculcar y acostumbrar al alumno de esta materia. Además de estudiar los textos, tiene estos juegos de números para despertar su capacidad que sólo la tiene dormida. Al igual que un banquero está hablando con un cliente que va a depositar cierta suma de dinero, lo primero que está calculando es el beneficio que puede suponer ese dinero dejándolo en su banco. Como un abogado está escuchando a su cliente y está pensando inmediatamente en el artículo del código que le puede amparar. Yo quiero que tú, en un momento dado, tienes que aflojar un tornillo y en vez de ir a buscar un destornillador o si no lo tienes pedírselo prestado al vecino. Quizá te sirva esa moneda que tienes en el bolsillo, para aflojarlo. Yo te estoy inculcando aquí el uso de esa moneda.

Llevando estas dos condiciones obtenidas a un gráfico, observaremos para qué valores la fracción en conjunto es mayor que cero.



SOLUCION

UNICA REGION DONDE LA FRACCION SE HACE POSITIVA

Ej.: Resolver la inecuación:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{(x + 1)(x - 1)} \leqslant 0$$

Estando reducida la inecuación a común denominador como está, estudiaremos separadamente el numerador y el denominador, lo realizaremos por el segundo procedimiento expuesto en el problema anterior.

Para que el numerador $x^2 - 3x + 2$ sea menor o igual que cero debe ocurrir que:

$$x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 \geqslant 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix}\text{Dos soluciones} \\ \text{Reales Distintas}\end{matrix} \rightarrow a < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Soluciones } 1 \leqslant x \leqslant 2$$

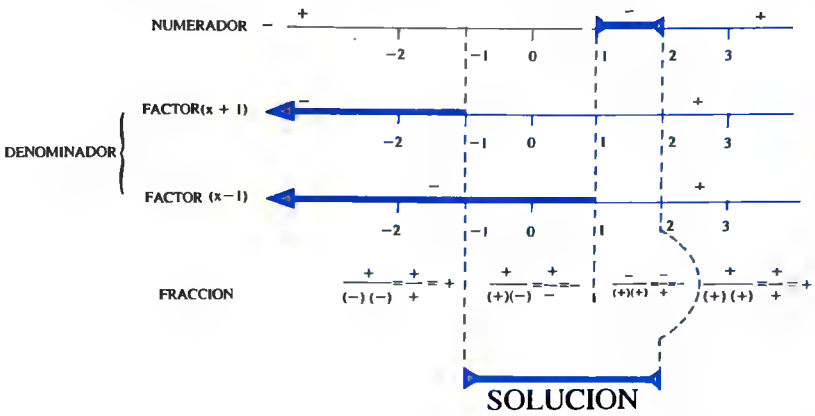
Para que el denominador sea menor o igual que cero debe ocurrir que:

$$x + 1 = 0\ ;\ x = -1 \rightarrow x \leqslant -1$$
$$x - 1 = 0\ ;\ x = 1 \rightarrow x \leqslant 1$$

De todo se pueden hacer problemas de matemáticas, por ejemplo. Dos hermanos «cazaron» escarabajos y arañas en total 10. (Téngase en cuenta que un escarabajo tiene 6 patas y una araña 8 patas) y el total de patas entre ambas clases de animales es 74. Se pregunta ¿Cuántos animales de cada clase se cazaron?

SOLUCION EN PAG. 368.

Llevando las condiciones obtenidas a un gráfico:



UNICA REGION DONDE LA FRACCION SE HACE NEGATIVA

Los valores 1 y − 1 no se deben considerar como soluciones, ya que anulan el denominador y la fracción resultaría infinita.

9.— SISTEMAS DE UNECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA.

Consiste en hallar un conjunto de soluciones que verifiquen todas las inecuaciones del sistema.

Para ello se tratarán separadamente cada una de las inecuaciones y en la zona común de soluciones de todas en el gráfico conjunto estará la solución del sistema.

Ej.: Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - \frac{x}{4} + 2 > -1 \\ x^2 < 4 \\ -2x + 3 < 0 \end{array}\right\}$$

Preparando el sistema, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - \frac{x}{4} + 3 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \\ -2x + 3 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 8x^2 - x + 12 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \\ -2x + 3 < 0 \end{array}\right\}$$

Estudio particular de la inecuación $8x^2 - x + 12 > 0$

$$8x^2 - x + 12 = 0;\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 384}}{16} =$$

$$\frac{1 \pm 19{,}6}{16} = \begin{cases} 1{,}2 \\ -1{,}1 \end{cases}$$

Las matemáticas influyeron decisivamente en los conceptos musicales, así se pueden comparar con el arte de componer.

El hombre siempre ha interpretado música, valiéndose de los más variados instrumentos.

Los primitivos instrumentos de viento se fueron agrupando y se llegó a una modalidad compuesta de tubos de diferentes longitudes y en los que el sonido se produce por la vibración del aire a través de ellos, este aire se obtenía por fuelles de muchas y variadas formas.

Parece que el órgano de boca china fue el antepasado más remoto, los romanos lo utilizaron y en un principio fue pequeño para poder transportarlo.

En la Edad Media se usó con gran profusión por los reyes y la nobleza para amenizar sus fiestas palaciegas. Más tarde y ya en el Renacimiento se fueron construyendo modelos cada vez de más tamaño. La iglesia hizo suyo este instrumento y lo instaló en casi todas sus iglesias y sobre todo en las catedrales donde se construyeron modelos de hasta 12.000 tubos con una longitud de 10 metros los tubos más largos.

$8x^2 - x + 12 > 0 \rightarrow$ Dos raíces Reales Distintas $\rightarrow a > 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Soluciones $-1{,}1 > x > 1{,}2$

Estudio particular de la inecuación $x^2 - 4 < 0$

$x^2 - 4 = 0 \; ; \; x = \pm 2$

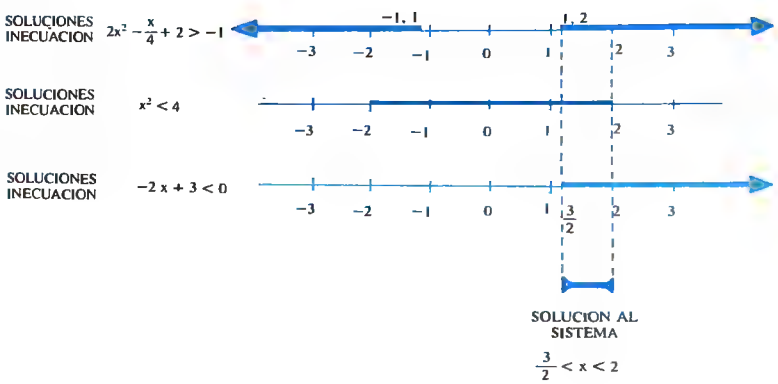
$-x^2 + 4 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones Reales Distintas $\rightarrow a < 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Soluciones $-2 < x < 2$

Estudio particular de la inecuación.

$-2x + 3 < 0 \rightarrow -2x < -3 \rightarrow 2x > 3 \rightarrow x > \frac{3}{2}$

Estudio conjunto de todas las inecuaciones.



Ej.: Hallar los valores que debe tener p para que la ecuación $x^2 - 3x + 5p = 0$ tenga soluciones reales.

Para que una ecuación de segundo grado tenga soluciones reales su discriminante debe ser mayor o igual que cero.

Así pues hallamos el discriminante de la ecuación $x^2 - 3x + 5p = 0$

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5p = 9 - 20p$$

$$9 - 20p \geq 0 \Rightarrow 9 \geq 20p \Rightarrow \frac{9}{20} \geq p$$

Es decir que:

Para $p < \frac{9}{20}$ la ecuación posee dos soluciones reales distintas

Para $p = \frac{9}{20}$ la ecuación posee dos soluciones iguales.

COMO SE HALLA LA CIFRA EN LA QUE TERMINA LA POTENCIA DE UN NUMERO.

La potencia de cualquier número debe terminar en cualquiera de los dígitos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Necesariamente al llegar a la décima potencia se ha tenido que repetir algún número (si no se ha repetido antes) y éste que se repite da lugar a que se vuelvan a repetir los que venían detrás de él, formando así un periodo.

Ej: Hallar la cifra en la que termina el número 3^{75}

$3^0 = 1$ termina en 1
$3^1 = 3$ termina en 3
$3^2 = 9$ termina en 9
$3^3 = 27$ termina en 7
$3^4 = 81$ termina en 1
$3^5 = 243$ termina en 3
$3^6 = 729$ termina en 9
$3^7 = 2187$ termina en 7
$3^8 = 6561$ termina en 1

luego el período es de 4 cifras (1, 3, 9, 7)

Dividimos el exponente de la potencia entre el número de cifras del periodo

75	4
35	18
(3)	

Como el resto es 3 terminará igual que $3^3 = 27$, es decir, termina en 7.

TEMA 18

RAZONES Y PROPORCIONES

INDICE

1.—Concepto de razón.
2.—Concepto de proporción.
3.—Teorema fundamental de las proporciones.
4.—Propiedades de las proporciones.
5.—Cuarta proporcional.
6.—Tercera proporcional.
7.—Media proporcional.
8.—Clases de proporcionalidad.
   A.—Magnitudes directamente proporcionales.
   B.—Magnitudes inversamente proporcionales.
9.—Regla de tres simple.
10.—Regla de tres compuesta.
11.—Repartimientos proporcionales.
   A.—Repartimientos proporcionales directos.
   B.—Repartimientos proporcionales inversos.
   C.—Repartimientos proporcionales compuestos.
12.—Regla de compañía.

TEMA 18

TRES MONTONES

Un profesor de matemáticas de mi hija les propuso a los alumnos que si solucionaban el dividir 30 en tres montones de número *impares enteros,* les compraría una bolsa de caramelos.

Sabía él de sobra que este problema no tiene solución, veámoslo.

1.° Todo número impar multiplicado por tres es siempre *impar.*

2.° Un número *impar* al sumarle otro impar, da siempre *par,* pero a este número par al sumarle otro impar, dará siempre *impar.* Luego este problema no tiene solución.

RAZONES Y PROPORCIONES

1.—CONCEPTO DE RAZON

Se entiende por razón de dos números, al cociente del primero por el segundo, al primero se le llama **antecedente** y al segundo **consecuente.**

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} a \rightarrow \text{ANTECEDENTE} \\ b \rightarrow \text{CONSECUENTE} \end{matrix} \Big\} \text{RAZON}$$

y se lee «a» es a «b».

De la definición se puede notar que una razón de dos números está sometida a las mismas reglas y propiedades que las fracciones (numerador = antecedente y denominador = consecuente).

Ej.: La razón de los números 4 y 5 es $\frac{4}{5}$, donde 4 es el antecedente y 5 el consecuente.

2.—CONCEPTO DE PROPORCION

Se entiende por proporción a la igualdad de dos razones.

Al primero y al último término se les llama **extremos** y al segundo y tercero **medios.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \begin{matrix} \text{MEDIOS} \\ \text{EXTREMOS} \end{matrix} \Big\} \text{PROPORCION}$$

Y se lee «a» es a «b» como «c» es a «d».

Ej.: En la proporción: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

— El 3 y el 6 son antecedentes.
— El 4 y el 8 son consecuentes.
— El 3 y el 8 son extremos.
— El 4 y el 6 son medios.

Una **proporción** se dice que es **continua,** cuando tiene iguales los extremos o los medios.

Ej.: La proporción $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ es continua por tener los medios iguales.

3.—TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES

En cualquier proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

NOTA.—Conocido el teorema fundamental de las proporciones, cualquier término de una proporción se puede despejar sin más que aplicar la teoría general de ecuaciones.

Ej.: Obsérvese como en la proporción siguiente y en cualquier proporción se debe cumplir el teorema fundamental

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4} \Rightarrow 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$$

Ej.: Hallar x en la siguiente proporción:

$$\frac{2}{5}=\frac{x}{10} \Rightarrow 2 \cdot 10 = 5 \cdot x \Rightarrow 20 = 5x \Rightarrow x = \frac{20}{5} = 4$$

Ej.: En una proporción la suma de antecedentes es 16; un antecedente es 4 y su consecuente 5. Calcular los otros términos de la proporción.

Imaginemos la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y consideremos la condición del problema.

$$\left.\begin{array}{l} a + c = 16 \\ a = 4 \\ b = 5 \end{array}\right\} \quad c = 16 - a = 16 - 4 = 12$$

Luego la proporción se define como: $\frac{4}{5}=\frac{12}{d}$

Así que aplicando el teorema fundamental:

$$4d = 5 \cdot 12 \Rightarrow 4d = 60;\ d = \frac{60}{4} = 15$$

Luego la proporción es: $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$

LIMITE DEL SISTEMA SOLAR

Resulta muy difícil dar una respuesta concreta de dónde está dicho límite. La respuesta más cercana la estimaríamos dentro de la órbita de Plutón que es el planeta más alejado de nuestro sistema solar. La distancia media entre el Sol y Plutón es de cerca de 6.000 millones de Kms. (40 unidades astronómicas; cada unidad astronómica mide 149.504.000 Kms. según acuerdo astronómico internacional).

Situamos a Plutón como último planeta de nuestro sistema solar, sin embargo, debido a que estamos en lo que podíamos llamar *Era de los satélites atificiales* acompañados éstos de toda una gama de complicados y sofisticados instrumentos, quizá y en un tiempo no muy lejano se nos indique la existencia de algún otro planeta más lejano de Plutón, que pertenezca a nuestro sistema solar y que llegue hasta él la influencia del Sol. Entonces se verían ampliadas las fronteras de nuestro sistema solar.

Las computadoras algunas veces se diría que tienen poderes sobrenaturales, por la velocidad con que calculan una operación. No olvidemos que esa computadora la ha construido el hombre. El hombre crea el programa y la computadora lo realiza. El computador no es un instrumento pensante, el instrumento pensante es el hombre, y la computadora lo ha desarrollado con arreglo a unas normas establecidas por el hombre. La máquina no piensa cuando juega al ajedrez, lo único que hace es verificar las posibilidades de la jugada siguiente, con un patrón que el hombre le programó anticipadamente. Existen otras computadoras que responden a la voz humana.

Nuestra voz es como las huellas digitales. Las ondas de nuestra palabra quedan grabadas en un osciloscopio e inmediatamente comprende el lenguaje. No digamos nunca que una computadora es más inteligente que el hombre, al igual que no podemos decir jamás que un conjunto de computadoras pueden competir con su «constructor».

4.—PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

Cuando nos encontremos con más de dos razones iguales, se dice que estamos **ante una serie de razones iguales.**

Todas estas razones iguales, que tomadas dos a dos deben cumplir el teorema fundamental de las proporciones, equivalen cada una de ellas a un número fijo que se llama **razón de proporcionalidad.**

Ej.: En la serie de razones iguales $\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}$.

La razón de proporcionalidad es 3.

$$\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=3$$

a) Primera propiedad fundamental.

En cualquier serie de razones iguales, la suma o diferencia de los antecedentes dividida por la suma o diferencia de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones de la serie.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \begin{cases} \dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \\ \dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \end{cases}$$

Ej.: En la serie de razones iguales $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}$.

La razón de proporcionalidad es 2/3

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

y se cumple la propiedad: $\frac{2+4+8}{3+6+12}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

b) Segunda propiedad fundamental

En cualquier proporción la suma o diferencia de los dos primeros términos es al primero como la suma o diferencia de los dos últimos es al tercero.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \begin{cases} \dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{c} \\ \dfrac{a-b}{a}=\dfrac{c-d}{c} \end{cases}$$

Ej.: En la proporción $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ se verifica.

$$\frac{1+2}{1}=\frac{4+8}{4} \Rightarrow \frac{3}{1}=\frac{12}{4} \Rightarrow 3\cdot 4=12$$

$$\frac{1-2}{1}=\frac{4-8}{4} \Rightarrow \frac{-1}{1}=\frac{-4}{4}=-1\cdot 4=1\cdot(-4)$$

c) En cualquier proporción la suma de los cuadrados del primero y segundo término partido por la suma de los cuadrados del segundo y tercer término es igual al producto del primero y segundo término dividido por el producto del tercero y cuarto.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$$

$$\text{Ej.: } \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{(2+4)^2}{(3+6)^2} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} \Rightarrow \frac{36}{81} = \frac{8}{18}$$

d) Otras propiedades.

— En toda proporción se pueden permutar los medios.
— En toda proporción se pueden permutar los extremos.
— En toda proporción se pueden permutar los medios y los extremos.
— En toda proporción se puede sustituir cada razón por su inversa.
— En toda proporción se pueden aplicar los criterios generales que no alteran las igualdades.

5.—CUARTA PROPORCIONAL

Cuarta proporcional a tres números dados en un orden determinado, es el cuarto término de una proporción.

Ej.: La cuarta proporcional de 2, 5 y 4 es:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{x} \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

6.—TERCERA PROPORCIONAL

Tercera proporcional es el cuarto término que de una proporción continua.

Ej.: Hallar la tercera proporcional de 1 y 3.

Como en la tercera proporcional se debe repetir un número para que la proporción sea continua, este número repetido es el último de los que nos dan para calcular la tercera proporcional.

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 9$$

7.—MEDIA PROPORCIONAL

Media proporcional son los extremos iguales o lo medios iguales para que una proporción sea continua.

Ej.: Hallar la media proporcional de 1 y 4.

Con la media proporcional debemos obligar a que una

¿Existió la Atlántida?

La ciencia todavía no ha podido aclarar de forma inequívoca esta pregunta.

Platón dice en sus escritos que este continente se hallaba situado frente al estrecho de Gades y que un terremoto hizo desaparecer la tierra bajo enormes olas.

Unos dicen que se trataba de un colosal continente, que se extendía desde las Canarias a las Azores.

Otra versión expresa que la Atlántida se extendía entre Europa y América, hipótesis que sirve para explicar algunas particularidades geológicas.

Los griegos que iniciaron la leyenda afirmaban que constituía un gran imperio, uniendo los continentes Europeo y Africano, con América. Algunos historiadores los identifican con los habitantes neolíticos de la península, constructores de los dólmenes que todavía existen.

También se hace notar la semejanza existente entre la Atlántida citada por Platón y el imperio de Tharsis en Andalucía, en ambos coinciden, la riqueza, el movimiento comercial y la abundancia de metales.

Los geólogos, los sabios y los investigadores, estudian los testimonios existentes, buscando vestigios que les permita reconstruir la vida de estos fabulosos Atlantes.

proporción sea continua (es decir, que tenga los medios o los extremos iguales).

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4} \Rightarrow x=2$$

Ej.: Hallar una proporción tal que la suma de sus extremos sea 11, su producto 24 y la diferencia de sus medios 10.

Consideremos la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y expongamos las condiciones del problema:

$$a+d=11;\ a\cdot d=24;\ b-c=10;\ ad=bc$$

Con las dos primeras ecuaciones formamos un sistema y calculamos a y d.

$$\left.\begin{array}{l} a+d=11 \\ a\cdot d=24 \end{array}\right\} \rightarrow a=11-d$$

$$\rightarrow (11-d)d=24 \rightarrow 11d-d^2=24 \rightarrow$$

$$\rightarrow d^2-11d+24=0;$$

$$d=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{2}=\frac{11\pm5}{2}=\begin{cases} 8 \rightarrow a=11-8=3 \\ 3 \rightarrow a=11-3=8 \end{cases}$$

Como da lo mismo colocar los extremos a y d en un orden que en otro, elegimos como solución a = 3 y d = 8. Con las otras ecuaciones propuestas al principio, formamos otro sistema de donde obtenemos los medios:

$$\left.\begin{array}{l} b-c=10 \\ ad=bc \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} b-c=10 \\ 24=bc \end{array}\right\} \rightarrow b=10+c$$

$$\rightarrow 24=(10+c)c \rightarrow$$

$$24=10c+c^2 \rightarrow c^2+10c-24=0$$

$$c=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{2}=\frac{-10\pm14}{2}=\begin{cases} 2 \rightarrow b=10+2=12 \\ -12 \rightarrow b=10-12=-2 \end{cases}$$

Así que la proporción pedida es:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{12}{8}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DEL LADRILLO

Si habéis pensado que el ladrillito pesa un kilogramo, no sé para qué gastáis el dinero en comprar «MATEMATICAS PARA TODOS» y luego no leerlos.

El de juguete no es cuatro veces *más corto,* sino también cuatro veces *más estrecho* y cuatro veces *más bajo:*

Así pues, su volumen y peso será $4 \times 4 \times 4 = 64$ *veces menor.*

Tendremos entonces y *reducido* a *gramos:*

$$\frac{4.000}{64} = 62{,}5 \text{ gramos}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA IGLESIA

Primeramente tenemos que medir en la fotografía, la altura de la torre y la base (¡Ojo! siempre y cuando la fotografía sea buena y no altere las proporciones). Vamos a suponer que la altura tenga 180 m/m y la base 30m/m.

Tenemos una proporción:

$$\frac{180}{30}=6$$

Ya sabemos que la altura es *seis* veces mayor que la base.

No tenemos más que medir la longitud de la base, sobre el modelo natural y esta medida la multiplicamos por *seis.*

Si la base mide por ejemplo 17 metros, la altura medirá 17 x 6 = 102 metros. Si no tenemos metro, realizamos la medida por pasos normales (cada dos pasos, un metro).

Por supuesto que la medida, por muy bien que esté la fotografía, jamás será de una exactitud matemática, pero sí bastante aproximada.

8.—CLASES DE PROPORCIONALIDAD

Cuando varias magnitudes están en proporcionalidad, distinguiremos dos clases: Directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

A) Se entiende por **magnitudes directamente proporcionales** cuando se verifica que:

— La alteración experimentada por una magnitud es proporcional a la alteración experimentada por la otra magnitud y en el mismo sentido (crecen o decrecen).

Considerando dos magnitudes proporcionales A y A′, si A crece al doble, el correspondiente a A que es A', también crecerá al doble.

Si A disminuye, también lo hará A′ y en la misma proporción.

NOTA.—Es corriente decir que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando van de «más a más» o de «menos a menos», idea aceptable por indicarse de otra forma la conservación del sentido en dos magnitudes directamente proporcionales.

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales la razón de todos los pares de valores correspondientes se mantiene constante.

1.ª MAGNITUD	*2.ª MAGNITUD*	
A	A′	
B	B′	$\Rightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=$ Constante
C	C′	

B) Se entiende por **magnitudes inversamente proporcionales** cuando se verifica que:

— La alteración experimentada por una magnitud es proporcional a la alteración experimentada por la otra magnitud y en sentido contrario.

Considerando dos magnitudes proporcionales A y A′, si A crece al doble, el correspondiente a A, que es A', decrecerá a la mitad.

Si A disminuye, A′ crecerá y en la misma proporción.

NOTA.—Es corriente decir que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando van de «más a menos» o de «menos a más», idea aceptable por querer indicar de otra forma el distinto sentido en dos magnitudes inversamente proporcionales.

— Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales el producto de todos los pares de valores correspondientes se mantiene constante.

1.ª MAGNITUD	*2.ª MAGNITUD*	
A	A′	
B	B′	$\Rightarrow AA'=BB'=CC'=$ Constante
C	C′	

NOTA.—Una proporcionalidad inversa se puede transformar fácilmente en una proporcionalidad directa. Es decir, una proporcionalidad inversa es una proporcionalidad directa a los inversos de una de las magnitudes.

NOTA.—Cuando no se especifique la clase de proporcionalidad, se debe suponer que se refiere a la directa.

Johannes Geusfleich, llamado Gutenberg fué el inventor de la tipografía, es decir, los tipos sueltos, las letras separadas que combinadas entre aí permiten componer toda clase de palabras y en todoa los idiomas. Al principio estas letras fueron talladas en madera dura, teniendo más tarde que buscar un metal más resistente.

Peter Schoffer, excelente grabador en metales se puso de acuerdo con Gutenberg creando unas matrices de acero en las que grabó cada tipo de letra, unidas éstas a unos moldes de mano, permitía fundir cada letra.

Su primera obra fué una versión de «La Biblia» llamada de 42 líneas, porque contiene ese número de líneas por página.

En el antiguo grabado que se reproduce en la página siguiente puede verse un taller de imprenta en los comienzos del arte de imprimir entre 1450 y 1550. En este primer siglo de su existencia, constituyó el arte mimado por los reyes, los príncipes, los nobles y los ricos. Las obras que se imprimieron en sus albores se cotizan hoy en cientos de miles de pesetas.

En este siglo de progresos técnicos, de potentes industrias que encierran maravillosas máquinas fotocomponedoras y precisas rotativas que, en verdad, pueden recibir el nombre de gigantes de la imprenta cumplimos con un deber al reproducir aste bello grabado, lleno de alegorías alusivas a

(Continúa en página siguiente)

este Arte. En un taller tan pobre de elementos como el presanta y usando las típicas balas para entintar, fué donde trabajaron y triunfaron Gutenber, Bodoni, Elcevir, Aldos, Ibarra y otros tantos artistas y artesanos, que han pasado a la historia como creadores de épocas y estilos en las Artes del libro. Fué, y aún sigue siendo, un Arte el de imprimir, como lo es todo aquello qua se hace usando las manos y los sentidos. Ved en esta reproducción a los cajistas, al prensista, al dador de tinta dispuesto a llevar a cabo su enormemente dificultosa labor, al aprendiz, preparando las pápiros. Todo, todo ello había de hacarse manualmenta en aquel entoncas. A España le cabe la gloria de incluir los nombres de varios de sus preclaros hijos en la época de los incunables, que constituyen una de les más gloriosas para la historia de la Humanidad.

Ej.: Si 5 metros de cordón cuestan 80 ptas. ¿Cuánto costarán 20 metros de cordón?

Está claro que es una proporcionalidad directa, ya que 20 metros de cordón cuestan más pesetas, así las magnitudes crecen en el mismo sentido, es decir, van de «más a más» (más metros de cordón, más pesetas).

1.ª MAGNITUD	*2.ª MAGNITUD*
5 m.	80 ptas.
20 m.	x ptas.

$$\Rightarrow \frac{5}{80} = \frac{20}{x}$$

Aplicando el teorema fundamental de las proporciones, a la proporción planteada obtenemos.

$$5x = 80 \cdot 20 \Rightarrow 5x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{1.600}{5} = 320 \text{ ptas.}$$

Ej.: Si 4 camiones tardan 8 días en hacer un transporte. ¿Cuántos camiones son necesarios para hacer el mismo transporte en 2 días?

Es una proporcionalidad inversa, ya que para hacer el mismo transporte en 2 días serán necesarios más camiones, así las magnitudes crecen en distinto sentido, es decir, van de «más a menos» (más camiones para menos días).

1.ª MAGNITUD	*2.ª MAGNITUD*	
4 camiones	8 días	$\Rightarrow 4 \cdot 8 = 2x \Rightarrow x = \frac{32}{2} = 16$ camiones
x camiones	2 días	

También se puede hacer el problema por proporcionalidad directa, sin más que invertir una de las magnitudes.

Así, la proporcionalidad siguiente es directa con el mismo ejercicio:

1.ª MAGNITUD	*2.ª MAGNITUD*	
4 camiones	1/8 días	$\Rightarrow \frac{4}{1/8} = \frac{x}{1/2} \Rightarrow 32 = 2x \Rightarrow$
x camiones	1/2 días	

$$\Rightarrow x = \frac{32}{2} = 16 \text{ camiones}$$

Ej.: En la fórmula $a = \frac{b}{c}$ indicar los estados de proporcionalidad de las tres letras entre los dos miembros de la igualdad, siendo a, b y c números naturales.

— Cuanto mayor sea b, mayor es a y cuanto mayor sea b, menor es a y viceversa. Como a y b conservan el mismo sentido decidimos:

[redacted]

— Cuanto mayor sea c, menor es a, y cuanto menor sea c, mayor es a y viceversa. Como a y c poseen distinto sentido, decidimos:

[redacted]

PROBLEMA DE VASOS

En la cantina de una Universidad, existía un camarero, que era muy célebre por su sagacidad. Los alumnos del último curso de medicina le quisieron probar y al mismo tiempo, si podían, tomarle el pelo demostrándole que ellos tenían más inteligencia que él.

Le pusieron diez vasos, los cinco primeros llenos y los cinco siguientes vacíos en la forma que se ve en la ilustración de la parte inferior.

La pregunta era, ponerlos de tal forma que quedasen, uno lleno, otro vacío, uno lleno, otro vacío... Pero moviendo solamente CUATRO VASOS (solución que sabían los universitarios, era cambiar el segundo por el séptimo y viceversa y el cuarto por el noveno y viceversa, o sea tocar cuatro vasos). El camarero, después de estar un largo rato mirando los vasos, pensando, sin definirse. A todo esto se juntó a su alrededor una gran cantidad de alumnos.

Sus chanzas y bromas intentaban ponerlo nervioso.

¡Si tocas cuatro vasos, eres un tio!, decía uno.

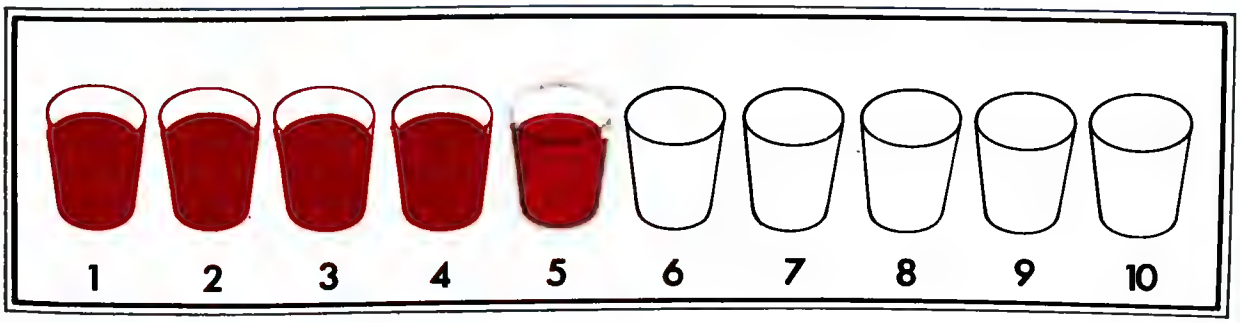
¡Si tocas tres vasos solamente, te declaramos genio!, decía otro.

¿Y si mueve solamente dos?, decía un tercero.

¡Si mueves solamente dos somos capaces de comprarte un coche!

¡Bien!, dijo el camarero, no necesito ni que me nombréis genio, ni lo del coche, sólo quiero vuestra amistad y el reconocimiento de mi ingenio, si consigo tocar... ¡¡Sólo dos vasos!! Veamos.

La solución en pág.384.



Uno de los libros que quizá sea el más vendido en el mundo entero puede que sea la «Historia de Garcia».

En Norteamérica, (en los tiempos que España perdió la isla de Cuba) había que llevar una carta al jefe de la resistencia, (aliado de los norteamericanos) que se encontraba en el corazón de la sierra Madre de Cuba. No se sabía a quién enviar, hasta que se encontró la persona idónea para allo, una persona fiel, callada y sumisa, pero muy efectiva, un tal GARCIA.

Le dieron la carta, no sin antes advertirle de los peligros que corría. Marchó el tal Garcia a Cuba, y después de atravesar una y otra vez las líneas enemigas, después de verse perseguido y metido en montones de emboscadas, por fin llegó a su destino. Entregó la carta y luego tuvo que pasar las mismas o més calamidades y peligros para regresar y cuando llegó a Norteamérica, al cabo de varios meses, lo único que se le ocurrió decir fué ¡Misión Cumplids!.

A nadie contó sus sufrimientos, era un hombre tan sancillo, que eso se quedó psra él solo.

Al igual que esto, el profesor, el médico, el ingeniero, y un sin fin de profesionsles, sacan el título, terminan la carrere y lo único que deben de decir es ¡Misión cumplida! como dijo Garcis.

9.—REGLA DE TRES SIMPLE

Se llama así al problema que se plantea entre dos magnitudes proporcionales y que tienen el objetivo de calcular una cantidad desconocida de una de las magnitudes de entre las dos propuestas.

Ej.: Si 4 hombres realizan un trabajo en 20 días. ¿Cuántos días emplearían 10 hombres en hacer el mismo trabajo?

4 hombres — 20 días
10 hombres — x días
} magnitudes inversamente proporcionales (más hombres → menos días)

$$4 \cdot 20 = 10x \rightarrow 80 = 10x \rightarrow x = \frac{80}{10} = 8 \text{ días}$$

Ej.: Si 20 kg. de un producto han costado 120 ptas. Averiguar cuál es el valor de 9 kg. del mismo producto.

20 kg. — 120 ptas.
9 kg. — x ptas.
} magnitudes directamente proporcionales (menos kg. → menos ptas.)

$$\frac{20}{120} = \frac{9}{x} \Rightarrow 20x = 9 \cdot 120 \Rightarrow 20x = 1.080 \Rightarrow x = \frac{1.080}{20} = 54 \text{ ptas.}$$

Ej.: Una cuadrilla de 30 empleados debe hacer un trabajo en 30 días. Transcurridos 12 días del comienzo de ésta se incorporan a la cuadrilla otros 6 empleados. ¿Cuánto tiempo dura el trabajo?

Obsérvese el gráfico para seguir la marcha del trabajo:

30 días — 30 empleados
12 días — 30 empleados
18 días — 30 empleados
} PRIMERAS CONDICIONES

12 días — 30 empleados
x días — 36 empleados
} SEGUNDAS CONDICIONES

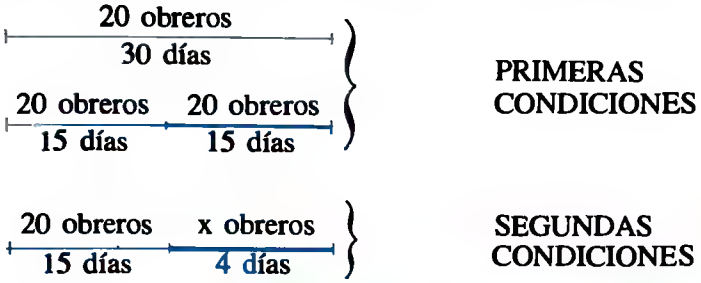
30 empleados — 18 días
36 empleados — x días
} magnitudes inversamente proporcionales (más empleados → menos días)

$$30 \cdot 18 = 36 \cdot x \Rightarrow 540 = 36x \Rightarrow x = \frac{540}{36} = 15 \text{ días}$$

DURACION DEL TRABAJO = 12 + 15 = 27 días

Ej.: Veinte obreros realizan una obra. Al cabo de quince días han hecho la mitad. ¿Cuántos obreros hay que agregar para terminar la obra en cuatro días?

Extrayendo los datos del problema y situándolos en su gráfico, precisaremos la situación:



20 obreros —— 15 días
x obreros —— 4 días

Magnitudes inversamente proporcionales
(menos días → más obreros)

$$20 \cdot 15 = 4x \Rightarrow 300 = 4x \Rightarrow x = \frac{300}{4} = 75 \text{ obreros.}$$

OBREROS AGREGADOS = 75 − 20 = 55 obreros.

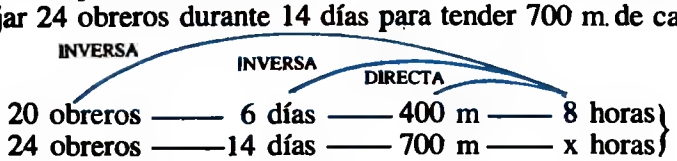
10.—REGLA DE TRES COMPUESTA

Se llama así al problema que se plantea entre más de dos magnitudes proporcionales y que tiene como objetivo, lo mismo que en la regla de tres simple, el calcular una cantidad desconocida de una de las magnitudes de entre todas las propuestas.

Para realizar una regla de tres compuesta, se eligen reglas de tres simples, establecidas entre la magnitud donde está lo desconocido y las restantes magnitudes, localizando así entre dos magnitudes su estado de proporcionalidad.

Para su cálculo rápido, dejamos la magnitud donde está la incógnita según se presenta e igual al producto de las restantes magnitudes, conservándolas en la misma posición que están si son directas e invirtiéndolas en el producto si son inversas.

Ej.: Veinte obreros durante 6 días han tendido 400 metros de cable, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias han de trabajar 24 obreros durante 14 días para tender 700 m. de cable?



$$\frac{8}{x} = \frac{24}{20} \cdot \frac{14}{6} \cdot \frac{400}{700} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{134.400}{84.000}$$

$$84.000 \cdot 8 = 134.400\,x \Rightarrow 672.000 = 134.400\,x$$

$$x = \frac{672.000}{134.400} = 5 \text{ horas}$$

En una empresa naviers se quejaban tres administrstivos de que ellos llevando 20, 22, y 23 años respectivsmente, seguían en el mismo puesto, y un empleado relativamente nuevo (sólo llevsba 5 años) había sido nombrado gerente de la misma. Pasaron estos tres administrstivos s ver al director general, a quejarse de esta circunstancia.

Cuando empezó el primero de ellos a dar sus quejas, en la calle se oía un ruido infernal, que no les dejaba hablar. El director envió al empleado primero a enterarse qué era lo que pasaba. Su respuesta fué, después de asomarse a la ventana: ¡Nada, unas carretas que pasan y los carreteros van vocesndo!

El segundo empleado empezó a dar sus quejas particulares y ¡otra vez el ruido de la calle! Señor Z vea lo que ocurre. Después de asomarse a la ventana, su respuesta fué: ¡Nada, unas carretas y unos carreteros que van hacia el puerto y van gritando para arrear a las caballerias!

El tercer, señor A, comenzó a dar sus quejas y el ruido otra vez. ¡Vaya a ver lo que ocurre! y la misma contestación.

Entonces el director general llamó al joven gerente y le dijo que viera lo que pasaba con tanto ruido y tanto gentío. Salió y al cabo de media hora regresó diciendo:

¡Señor director, acaba de llegsr un barco cargado de algodón; como nosotros tenemos los almacenes llenos del mismo, tenemos dos soluciones, la primera es venderlo inmediatamente, pero me parece mejor solución la segunda que se me ocurre, que es, que salgan nuestras carretas y concurrsn también a la subasta, así, de esta manera, como nosotros tenemos más carretas y almacenes más grandes que ls competencia, al tener més género que ninguno, podíamos nosotros fijar el precio del algodón al minorista!

Entonces el director general se dirigió a los otros tres empleados diciendo:

¡Se habrán dado cuenta por qué lo he nombrado gerente.

Ej.: Si disponemos de 4 empleados para imprimir 20 libros en 12 días, resulta que a los 4 días sólo han conseguido terminar 5 libros. ¿Cuántos empleados deberán ayudarles para conseguir terminar en el plazo señalado?

DIRECTA
INVERSA

4 empleados ——— 4 días ——— 5 libros
x empleados ——— 8 días ——— 15 libros
(12 − 4) (20 − 5)

$$\frac{4}{x}=\frac{8}{4}\cdot\frac{5}{15} \Rightarrow \frac{4}{x}=\frac{40}{60} \Rightarrow 4\cdot 60 = 40x$$

$$240 = 40x \Rightarrow x = \frac{240}{40} = 6 \text{ empleados}$$

NUMERO DE EMPLEADOS A AYUDAR $=6-4=2$ empleados

11.—REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES

Consiste en repartir un número proporcionalmente a otros dados. Pueden ser directos, inversos o compuestos

A) Repartimientos proporcionales directos

Al repartir un número N en partes directamente proporcionales a otros a, b, y c obtendremos las partes respectivamente proporcionales x, y, z de la siguiente forma:

La obtención de las expresiones citadas es fácil. Si las partes son x, y, z,y tienen que ser proporcionales a los números a, b y c, escribiremos tal proporcionalidad de la siguiente forma:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

Aplicando una de las propiedades de las razones podemos escribir:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{N}{a+b+c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{N}{a+b+c}$$

Y planteando tres ecuaciones sencillas, podemos deducir cada una de las partes

$$\frac{x}{a}=\frac{N}{a+b+c} \Rightarrow x = a\,\frac{N}{a+b+c}$$

$$\frac{y}{b}=\frac{N}{a+b+c} \Rightarrow y = b\,\frac{N}{a+b+c}$$

LOS MUSICOS

De todos es sabido que en la región de Valencia existe una gran afición por la música.

En un pueblecito de no más de 60 habitantes, existe una banda de música, en que todos sus componentes son de dicho pueblo. En un desfile, vi al maestro que situaba a los músicos de 2 en 2 y siempre sobraba uno; los ponía de 3 en 3 ó de 4 en 4 y también le sobraba siempre 1. Este que sobraba era el más pequeño y claro, con un complejo enorme al tener que ir con su descomunal tambor, el último. Por más que el maestro hacía pruebas, le sobraba siempre uno. Hasta que el mismo niño le dijo a su maestro: ¡Claro, yo siempre estoy sobrando, pero si Vd. nos pone de 5 en 5, ya verá cómo no sobramos ninguno! Se hizo, y efectivamente, ya no sobraba ninguno. ¿Cuántos formaban la banda?

La solución en pág. 384

$$\frac{z}{c} = \frac{N}{a+b+c} \Rightarrow z = c\,\frac{N}{a+b+c}$$

Resumiendo, podemos formalizar el siguiente esquema:

Número	*Proporcionales a:*	*Partes proporcionales*
N	a	$x = a\,\frac{N}{a+b+c}$
	b	$\Rightarrow\ y = b\,\frac{N}{a+b+c}$
	c	$z = c\,\frac{N}{a+b+c}$

Ej.: Tres comerciantes compran un lote de piezas iguales de sastrería que valen 57.680 ptas. El primero se queda con dos piezas, el segundo con 5 piezas y el tercero con 7 piezas. ¿Averiguar cuánto han de pagar cada uno?

Es evidente que el reparto es directamente proporcional, ya que cuantas más piezas adquiere un comerciante más debe de pagar.

$$57.680 \begin{cases} 2 \to x = 2 \cdot \frac{57.680}{2+5+7} = 2 \cdot 4.120 = 8.240 \\ 5 \to y = 5 \cdot \frac{57.680}{2+5+7} = 5 \cdot 4.120 = 20.600 \\ 7 \to z = 7 \cdot \frac{57.680}{2+5+7} = 7 \cdot 4.120 = 28.840 \end{cases}$$

57.680

Ej.: Una herencia de 600.000 ptas. se reparte entre tres hermanos proporcionalmente a sus edades. La edad de los dos menores es de 2 y 5 años respectivamente y se sabe que el primero cobra 80.000 ptas. Cuál es la edad del hermano mayor y cuanto correspondió a cada uno. Lógicamente el que más edad tiene, recibirá más parte de la herencia y así sucesivamente, luego es repartir directamente proporcional a las edades.

$$600.000 \begin{cases} 2 \to x = 2\,\frac{600.000}{2+5+a} = 80.000 \text{ (de donde se deduce a)} \\ 5 \to y = 5\,\frac{600.000}{2+5+a} \\ a \to z = a\,\frac{600.000}{2+5+a} \end{cases}$$

Los hombres y las mujeres llevan en sí mismos la afición a los juegos de azar. Uno de los más antiguos pasatiempos que emplearon nuestros más remotos antepasados son los dados, este juego es el más antiguo que se conoce, debe ser originario de algún país de Oriente, ya que ha sido encontrado en excavaciones de culturas anteriores a las de Europa.

En Grecia jugaban todas las clases sociales; los cubiletes eran de forma cónica.

En Roma se hizo tan arraigada la costumbre de jugar a los dados que se dictsron algunas leyes encaminadas a regular y refrenar la pasión del juego. Todos los soldados romanos llevaban dados y decidían rápidamente sobre el terreno la propiedad de dinero, ropas, cualquier botín de guerra que fuera deseado por varios.

Hoy es todavía uno de los juegos que se practica en los más lujosos casinos.

Deducimos, pues, la edad del mayor de los hermanos.

$$\frac{1.200.000}{7+a} = 80.000; 1.200.000 = 560.000 + 80.000\,a$$

$$640.000 = 80.000\,a \Rightarrow a = \frac{640.000}{80.000} = 8 \text{ años}$$

Deducimos a continuación la parte que le toca al hermano mediano y al mayor:

$$y = 5\,\frac{600.000}{2+5+8} = \frac{3.000.000}{15} = 200.000 \text{ ptas.}$$

$$z = 8\,\frac{600.000}{2+5+8} = \frac{4.800.000}{15} = 320.000 \text{ ptas.}$$

B) Repartimientos proporcionales inversos.

Repartir un número N en partes inversamente proporcionales a los números a, b y c, equivale a repartir N en partes directamente proporcionales a los inversos de los números dados, es decir $a\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$.

Ej.: Repartir 578 en partes inversamente proporcionales a 4, 6 y 18. Repartimos 578 directamente proporcional a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{18}$.

$$\frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}\,\frac{578}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{578}{\frac{9+6+2}{36}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{20.808}{17} = \frac{1}{4}\cdot 1.224 = 306$$

$$578 \quad \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{1}{6}\,\frac{578}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}} = \frac{1}{6}\cdot 1.224 = 204$$

$$\frac{1}{18} \rightarrow z = \frac{1}{18}\,\frac{576}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}} = \frac{1}{18}\cdot 1.224 = 68$$

Ej.: Descomponer el número 11.400 en tres sumandos que sean inversamente proporcionales a 4, 9 y al medio proporcional de esos dos números. Primeramente vamos a hallar el medio proporcional de 4 y 9:

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9} \Rightarrow 36 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{36} = 6$$

EQUIVOCO

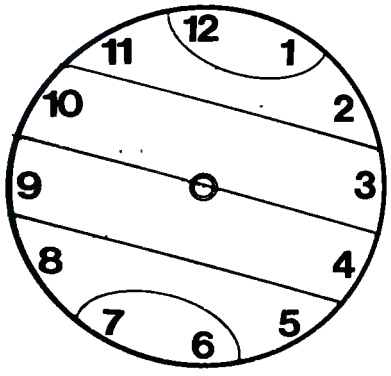
Procurar no influencisros en epreciaciones equivocsdas y que éstas os lleven por otro csmino.

Por ejemplo: en un colegio, el profesor ha dejado encims de la mesa 43 bolígrafos. Un slumno ladrón roba todos menos 8. ¿Cuántos bolígrsfos quedaron? La Solución NO es 35, como posiblemente penséis, son 8, ya que roba todos menos 8, el ser *menos 8*, es que dejó 8 que son los que quedaron. ¡Cuidado con las apreciaciones!

UN PROBLEMA DE «RAPIDEZ DE COMPRENSION».

El problems consiste en dividir la esfera de un reloj en seis partes y de forma que en csda división, la suma de los números sea siempre la misma, en lss seis partes.

SOLUCIÓN



Así que 11.400 se reparte inversamente proporcional a 4, 6 y 9, es decir directamente proporcional a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{9}$.

$$\frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}\,\frac{11.400}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}\,\frac{11.400}{\frac{9+6+4}{36}}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{410.400}{19} = \frac{1}{4}\,21.600 = 5.400$$

$$11.400 \quad \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{1}{6}\,\frac{11.400}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{6}\,21.600 = 3.600$$

$$\frac{1}{9} \rightarrow z = \frac{1}{9}\,\frac{11.400}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}\,21.600 = 2.400$$

Ej.: Repartir el número 1.620 en partes inversamente proporcionales a $\frac{3}{4}$, 6 y $\frac{4}{3}$.

Repartimos en partes directamente proporcionales a $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{3}{4}$.

$$\frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}\,\frac{1.620}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\,\frac{1.620}{\frac{16+2+9}{12}} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{19.440}{27} = \frac{4}{3}\,720 = 960$$

$$1.620 \quad \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{1}{6}\,\frac{1.620}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{6} \cdot 720 = 120$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow z = \frac{3}{4}\,\frac{1.620}{\frac{4}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot 720 = 540$$

C) Repartimientos proporcionales compuestos

Repartir un número N en partes directamente proporcionales a los números a, b y c, y a los números a', b' y c', es repartirlo en partes directamente proporcionales a los productos aa', bb' y cc'.

Nuestra civilización no existirís sin las leyes matemáticas o físicas. Nsdie podría sumar o restar si nc hubieran existido los mesopotámicos e hindúes. No sabrísmos que la tierra tuviera forma de esfera sin la geometría de los griegos. Nadie construirís edificios sin los rudimentos de los egipcios. Nadie conocerís ni el cemento ni el yeso, sin antes, los egipcios hacer las srgamasas s base de barro y de psja. Sin Galileo ni Newton. ¿Quién inventaría máquinas ya que ellos precisamente fueron los que forjaron ls revolución industrial? En fin, la aritmética como ciencia de los números; la geometría, como ciencia de lss formss; el álgebra, para conocer cantidades desconocidss. Después de estas tres msterias salieron otras pero dependiendo siempre, en todas lss cosas y sin excepción posible (como snálisis, cálculo, ... etc.) de lss tres primeras (sritmética, geometrís, y álgebrs). Estos son la llave de la física, ls mecánics, ls astronomía y tantos otros.

Al comienzo del siglo XIII aparece en Pisa (Italia) un escrito que inicia el renacimiento matemático de Occidente: «Libro de los ábacos», de Fibonacci, quien después de haber adquirido el ssber matemático de los árabes en Africa, se propuso mostrar las ventajss del sistema de numersción posicional con las cifras hindúes frente al uso corriente todavía en aquellos tiempos, del ábsco y de los números romanos. Este libro no se limita a exponer aquellss ventajas sino que agrega la práctica de las operaciones con las nuevas cifrss y una variada serie de cuestiones y problemas resueltos de aritmética, álgebrs y geometria que continúa en otros escritos posteriores, reveléndose como un hábil matemético verssdo especialmente en la teoría de los números.

Ej.: Repartir 957.000 ptas. en partes directamente proporcionales o simplemente proporcionales a los números 2, 3 y 5 y a los números $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{40}$ y $\frac{1}{45}$.

Es decir, que hay que repartir proporcionalmente a los productos de los números $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{40}$ y $\frac{5}{45}$

$$957.000 \begin{cases} \frac{2}{36} \to x = \frac{2}{36} \frac{957.000}{\frac{2}{36}+\frac{3}{40}+\frac{5}{45}} = \frac{2}{36} \frac{957.000}{\frac{20+27+40}{360}} = \frac{2}{36} \cdot 3.960.000 = 220\,000 \\ \frac{3}{40} \to y = \frac{3}{40} \frac{957.000}{\frac{2}{36}+\frac{3}{40}+\frac{5}{45}} = \frac{3}{40} \cdot 3.960.000 = 297.000 \\ \frac{5}{45} \to z = \frac{5}{45} \frac{957.000}{\frac{2}{36}+\frac{3}{40}+\frac{5}{45}} = \frac{5}{45} \cdot 3.960.000 = 440.000 \end{cases}$$

Ej.: Tres personas deben repartirse una herencia de 300.000 ptas. en partes directamente proporcionales al número de hijos de cada uno, 2, 3 y 5 respectivamente, e inversamente proporcionales a los capitales que ya poseen, que son 40.000 ptas., 90.000 ptas. y 250.000 ptas. Calcular la parte correspondiente a cada persona.

Repartimos directamente a los productos de 2, 3 y 5 y $\frac{1}{40.000}$, $\frac{1}{90.000}$ y $\frac{1}{250.000}$ es decir, a los números $\frac{2}{40.000}$, $\frac{3}{90.000}$ y $\frac{5}{250.000}$

$$300.000 \begin{cases} \frac{2}{40.000} \to x = \frac{2}{40.000} \frac{300.000}{\frac{2}{40.000}+\frac{3}{90.000}+\frac{5}{250.000}} = 145.161,29 \\ \frac{3}{90.000} \to y = \frac{3}{90.000} \frac{300.000}{\frac{2}{40.000}+\frac{3}{90.000}+\frac{5}{250.000}} = 96.774,19 \\ \frac{5}{250.000} \to z = \frac{5}{250.000} \frac{300.000}{\frac{2}{40.000}+\frac{3}{90.000}+\frac{5}{250.000}} = 58.064,51 \end{cases}$$

$$\simeq \overline{300.000}$$

Al comienzo del siglo XIII aparece en Pisa (Italia) un escrito que inicie el renacimiento matemático de Occidente: «Libro de los ábacos», de Fibonacci, quien después de haber adquirido el saber matemático de los árabes en Africa, se propuso mostrar las ventajas del sistema de numeración posicional con las cifras hindúes frente al uso corriente todavía en aquellos tiempos, del ábaco y de los números romanos. Este libro no se limita a exponer aquellas ventajas sino que agrega la práctica de las operaciones con las nuevas cifras y una variada serie de cuestiones y problemas resueltos de aritmética, álgebra y geometría que continúa en otros escritos posteriores, revelándose como un hábil matemático versado especialmente en la teoría de los números.

Ej.: Repartir 957.000 ptas. en partes directamente proporcionales o simplemente proporcionales a los números 2, 3 y 5 y a los números $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{40}$ y $\frac{1}{45}$.

Es decir, que hay que repartir proporcionalmente a los productos de los números $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{40}$ y $\frac{5}{45}$

$$957.000 \begin{cases} \frac{2}{36} \to x = \frac{2}{36}\,\frac{957.000}{\frac{2}{36}+\frac{3}{40}+\frac{5}{45}} = \frac{2}{36}\,\frac{957.000}{\frac{20+27+40}{360}} = \frac{2}{36}\cdot 3.960.000 = 220.000 \\ \frac{3}{40} \to y = \frac{3}{40}\,\frac{957.000}{\frac{2}{36}+\frac{3}{40}+\frac{5}{45}} = \frac{3}{40}\cdot 3.960.000 = 297.000 \\ \frac{5}{45} \to z = \frac{5}{45}\,\frac{957.000}{\frac{2}{36}+\frac{3}{40}+\frac{5}{45}} = \frac{5}{45}\cdot 3.960.000 = 440.000 \end{cases}$$

Ej.: Tres personas deben repartirse una herencia de 300.000 ptas. en partes directamente proporcionales al número de hijos de cada uno, 2, 3 y 5 respectivamente, e inversamente proporcionales a los capitales que ya poseen, que son 40.000 ptas., 90.000 ptas. y 250.000 ptas. Calcular la parte correspondiente a cada persona.

Repartimos directamente a los productos de 2, 3 y 5 y $\frac{1}{40.000}$, $\frac{1}{90.000}$ y $\frac{1}{250.000}$ es decir, a los números $\frac{2}{40.000}$, $\frac{3}{90.000}$ y $\frac{5}{250.000}$

$$300.000 \begin{cases} \frac{2}{40.000} \to x = \frac{2}{40.000}\,\frac{300.000}{\frac{2}{40.000}+\frac{3}{90.000}+\frac{5}{250.000}} = 145.161,29 \\ \frac{3}{90.000} \to y = \frac{3}{90.000}\,\frac{300.000}{\frac{2}{40.000}+\frac{3}{90.000}+\frac{5}{250.000}} = 96.774,19 \\ \frac{5}{250.000} \to z = \frac{5}{250.000}\,\frac{300.000}{\frac{2}{40.000}+\frac{3}{90.000}+\frac{5}{250.000}} = 58.064,51 \end{cases}$$

$$\simeq 300.000$$

12.—REGLA DE COMPAÑIA

Tiene por objeto el repartir proporcionalmente entre varios socios los beneficios o pérdidas de una empresa común.

Representa una aplicación de los repartimientos proporcionales. Generalmente se presentan tres casos.

— Que los capitales aportados por los socios sean diferentes y permanezcan el mismo tiempo en la sociedad.

Entonces la ganancia o pérdida, llamada dividendo se reparte en partes proporcionales a los capitales.

— Que los capitales aportados por los socios sean iguales y no permanezcan el mismo tiempo en la sociedad.

Las pérdidas o ganancias se reparten proporcionalmente a los tiempos.

— Que los capitales aportados y los tiempos que están en la sociedad sean diferentes.

Las pérdidas o ganancias se reparten proporcionalmente a los productos de los capitales por los tiempos (Reparto Proporcional Compuesto).

NOTA.—Entiéndase la palabra proporcional a secas, como directamente proporcional.

Ej.: La aportación de dinero hecha por tres socios a una empresa es la siguiente: el primero aporta 90.000 ptas., el segundo 54.000 ptas. y el tercero 81.000 ptas. El beneficio de la sociedad al cabo de un cierto tiempo es de 35.000 ptas. Averiguar cuál es la ganancia de cada socio.

$$35.000 \begin{cases} 90.000 \rightarrow x = \\ = 90.000 \dfrac{35.000}{90.000 + 54.000 + 81.000} = 14.000 \\ 54.000 \rightarrow y = \\ = 54.000 \dfrac{35.000}{90.000 + 54.000 + 81.000} = 8.400 \\ 81.000 \rightarrow z = \\ = 81.000 \dfrac{35.000}{90.000 + 54.000 + 81.000} = 12.600 \end{cases}$$

Con las obras de Fibonacci nace en Occidente la lucha entre los «abacistas», que preferían el uso del ábaco y los números romanos y los «algoritmicos», que preferían operar con las nuevas cifras hindúes. Los comerciantes fueron en un principio grandes opositores, resolviéndose al fin en favor de la nueva teoría.

En la matemática del siglo XIV aparecen los primeros atisbos de cálculo infinitesimal, que el nuevo algoritmo facilita; así el matemático inglés Merton desarrolló en forma retórica su regla de Mertón y el francés Oresmes en forma gráfica estudian las «intensidades de las cualidades» modismo medieval que indica las variaciones de magnitudes respecto del tiempo, llegando a dar exactamente tanto uno como otro, la ley del movimiento uniformemente variado.

De origen mediterráneo, genovés, catalán o mallorquín, son probablemente las cartas marinas medievales, las primeras referencias escritas de cartas marinas a bordo, así como la carta más antigua conocida, la llamada «Carta pisana», sin fecha, y las primeras fechadas son de fines del siglo XIII y comienzos del XIV.

Entre las cartaa marinas antiguas sobresalen los «portolanos», que no llevan indicación de longitud, ni de latitud, aunque esta última era fácil de obtener con los instrumentos de la época, se indicaban «líneas de rumbo» que radiaban de un cierto número de puntos y facilitaban la dirección del barco. El portolano es un libro de derrotero, una descripción escrita de las costas y de los puertos con indicación de las distancias mutuas, una especie de guía con instrucciones para los navegantes, pero se ha dado también en llamar portolano a las cartas que normalmenta acompañaban a este libro auxiliar de los antiguos navegantes.

Ej.: Cuatro socios reúnen un capital de 5.518.000 ptas. para explotar un negocio en el que obtienen una ganancia de 1.548.000 ptas. Repartida ésta corresponden al primero 350.000 ptas., al segundo 420.000 ptas. y al tercero 180.000 ptas. y al cuarto el resto. Encontrar el capital empleado por cada socio.

GANANCIAS

1.° Socio ——— 350.000 ptas.
2.° Socio ——— 420.000 ptas.
3.° Socio ——— 180.000 ptas.

950.000 ptas.
4.° Socio ——— 598.000 ptas.

1.548.000 ptas. (Ganancia total)

$$1.548.000 \begin{cases} a \rightarrow 350.000 = a\,\dfrac{1.548.000}{a+b+c+d} \\ b \rightarrow 420.000 = b\,\dfrac{1.548.000}{a+b+c+d} \\ c \rightarrow 180.000 = c\,\dfrac{1.548.000}{a+b+c+d} \\ d \rightarrow 598.000 = d\,\dfrac{1.548.000}{a+b+c+d} \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER
$(a + b + c + d = 5.418.000)$

CAPITALES EMPLEADOS

a = 1.225.000 ptas.
b = 1.470.000 ptas.
c = 630.000 ptas.
d = 2.093.000 ptas.

5.418.000 ptas.

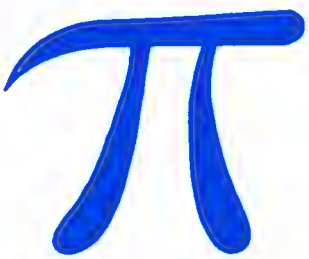
TEMA 19

COMBINATORIA

INDICE

1.—Introducción.
   A.—Naturaleza.
   B.—Orden.
2.—Variaciones.
3.—Formación de las Variaciones.
   A.—Formación ordinaria.
   B.—Formación por diagrama en árbol.
4.—Variaciones con repetición.
5.—Formación de las variaciones con repetición.
   A.—Formación ordinaria.
   B.—Formación por diagrama en árbol.
6.—Permutaciones.
7.—Formación de las permutaciones.
8.—Permutaciones circulares.
9.—Permutaciones con repetición.
10.—Formación de las permutaciones con repetición.
11.—Descomposición de m! en factores primos.
   A.—Primera forma.
   B.—Segunda forma.
12.—Combinaciones.
13.—Formación de las combinaciones.
14.—Combinaciones con repetición.
15.—Formación de las combinaciones con repetición.
16.—Propiedades de los números combinatorios.
   A.—Primera propiedad.
   B.—Segunda propiedad.
   C.—Triángulo de Tartaglia.
   D.—Triángulo de Pascal.
17.—Potencia de un binomio. Fórmula de Newton.
18.—Particularidades en el binomio de Newton.
   A.—Número de términos del desarrollo.
   B.—Características de los números combinatorios.
   C.—Cálculo del término general de un binomio.
19.—Potencia de un polinomio. Fórmula de Leibnitz.
   A.—Cálculo de los términos.
   B.—Cálculo de los coeficientes.
   C.—Conjugación de términos y coeficientes.

TEMA 19



Gaus obtuvo doscientas cifras decimeles de π. Richter quinientas decimales; Shauhs setecientas decimales.

Por supuesto, pensaréis que no hacen falta tantas cifras decimales pare calcular cualquier problema de circunferencias o círculos, diez cifras decimales son suficientes pera calcular le circunferencia de la Tierre con error de un centímetro. Después que realizamos problemas de astronomía, sabemos hasta qué punto es necesario poner a π cuantos más decimales mejor. Pensed la perfección con que los satélites artificiales realizan sus órbitas; los ordenadores tienen que operar con multitud de decimales, cuanto más amplio o perfecto sea el cálculo mayor será el éxito de su función.

Por supuesto, todos estos cálculos los realizamos en su día con la ayuda de las Tablas de Logaritmos por la amplitud y complejidad de las opereciones. Hoy día estos cálculos astronómicos los realizan, todos, las computadoras...

COMBINATORIA

1.—INTRODUCCION

La teoría de los números elimina de sus respectivos conjuntos la naturaleza y el orden de sus elementos, considerando dichos elementos como abstractamente equivalentes. No ocurre así con la Combinatoria que necesita distinguir a los elementos de cada conjunto en cuestión, incitándoles a no ser equivalentes en el sentido anteriormente expuesto.

Pues bien, la Combinatoria es la parte de las Matemáticas que se dedica a calcular la cantidad de colecciones o grupos de elementos que se pueden formar con los m elementos de un conjunto tomados de n en n. Ej.: Imaginemos cuántos equipos de fútbol distintos podemos formar con 20 personas. Téngase en cuenta que cada equipo consta de 11 personas. (Es decir, son 20 elementos tomados de 11 en 11.) El problema de hallar la totalidad de estos grupos, es un asunto que se manifiesta estrechamente ligado al de hallar la cantidad de aplicaciones que se pueden obtener con dos conjuntos finitos.

Es muy importante fijar la idea, de que los diferentes grupos que se pueden formar en la Combinatoria, tienen aptitud según cada caso, para diferenciarse por los dos criterios siguientes:

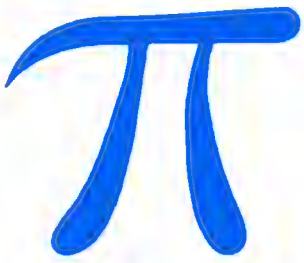
A) **Naturaleza de los elementos en los grupos.** Se da este criterio, cuando exista la posibilidad de que dos grupos puedan ser diferentes entre sí, porque uno de ellos tenga elementos que no tenga el otro.

Ej.: Con 10 bolígrafos distintos, pensemos en los grupos de tres bolígrafos que se podrían formar.

Es evidente que dos cualesquiera grupos de 3 bolígrafos, tienen aptitud para diferenciarse por el criterio de naturaleza, ya que en uno cualquiera de los grupos, existe la posibilidad de que tenga uno o varios bolígrafos distintos con respecto a otro grupo.

π = Pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4

TEMA 19



Gaus obtuvo doscientas cifras decimales de π. Richter quinientas decimales; Shauhs setecientas decimales.

Por supuesto, pensaréis que no hacen falta tantas cifras decimales para calcular cualquier problema de circunferencias o círculos, diez cifras decimales son suficientes para calcular la circunferencia de la Tierra con error de un centímetro. Después que realizamos problemas de astronomía, sabemos hasta qué punto es necesario poner a π cuantos más decimales mejor. Pensad la perfección con que los satélites artificiales realizan sus órbitas; los ordenadores tienen que operar con multitud de decimales, cuanto más amplio o perfecto sea el cálculo mayor será el éxito de su función.

Por supuesto, todos estos cálculos los realizamos en su día con la ayuda de las Tablas de Logaritmos por la amplitud y complejidad de las operaciones. Hoy día estos cálculos astronómicos los realizan, todos, las computadoras...

COMBINATORIA

1.—INTRODUCCION

La teoría de los números elimina de sus respectivos conjuntos la naturaleza y el orden de sus elementos, considerando dichos elementos como abstractamente equivalentes. No ocurre así con la Combinatoria que necesita distinguir a los elementos de cada conjunto en cuestión, incitándoles a no ser equivalentes en el sentido anteriormente expuesto.

Pues bien, la Combinatoria es la parte de las Matemáticas que se dedica a calcular la cantidad de colecciones o grupos de elementos que se pueden formar con los m elementos de un conjunto tomados de n en n. Ej.: Imaginemos cuántos equipos de fútbol distintos podemos formar con 20 personas. Téngase en cuenta que cada equipo consta de 11 personas. (Es decir, son 20 elementos tomados de 11 en 11.) El problema de hallar la totalidad de estos grupos, es un asunto que se manifiesta estrechamente ligado al de hallar la cantidad de aplicaciones que se pueden obtener con dos conjuntos finitos.

Es muy importante fijar la idea, de que los diferentes grupos que se pueden formar en la Combinatoria, tienen aptitud según cada caso, para diferenciarse por los dos criterios siguientes:

A) **Naturaleza de los elementos en los grupos.** Se da este criterio, cuando exista la posibilidad de que dos grupos puedan ser diferentes entre sí, porque uno de ellos tenga elementos que no tenga el otro.

Ej.: Con 10 bolígrafos distintos, pensemos en los grupos de tres bolígrafos que se podrían formar.

Es evidente que dos cualesquiera grupos de 3 bolígrafos, tienen aptitud para diferenciarse por el criterio de naturaleza, ya que en uno cualquiera de los grupos, existe la posibilidad de que tenga uno o varios bolígrafos distintos con respecto a otro grupo.

π = Pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4

B) Orden de sucesión de los elementos en los grupos. Se manifiesta este criterio cuando existe la posibilidad de que dos grupos puedan ser diferentes entre sí porque la colocación de los elementos influya en la formación de éstos.

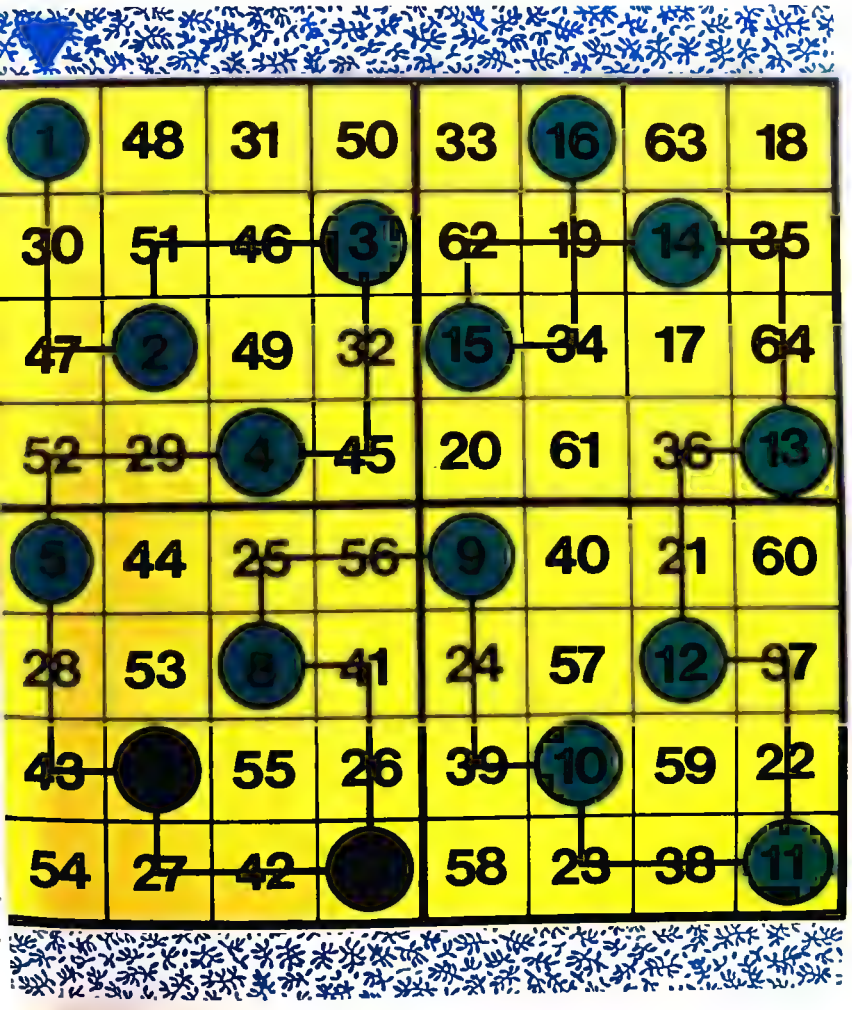
Ej.: Obsérvese que con las cifras 1, 2 y 3, podemos formar grupos de tres cifras, resultando números que son distintos entre sí, por la colocación de las cifras. Decididamente pensaremos que en estos grupos existe la posibilidad del criterio, de orden de sucesión de los elementos en los grupos.

En el desarrollo posterior del tema, observaremos la importancia del planteamiento de estos dos criterios y las consecuencias inmediatas que producirán.

En general, la Combinatoria se moviliza alrededor de tres conceptos o ejes fundamentales que estudiaremos detenidamente; éstos son: Variaciones, Permutaciones y Combinaciones.

2.—VARIACIONES

Se entiende por variaciones, a los diferentes grupos que se pueden formar con una cierta cantidad de elementos m. tomados n a n, teniendo en cuenta los criterios de naturaleza y orden, de los elementos en los grupos.



Volviendo con el tema de los cuadrados mágicos y su forma de realización, vamos a ver uno de los más espectaculares. El diseñado por el matemático Leonhard Euler, nacido en Suiza, en el año 1707 y muerto en 1783.

No conocemos ninguna explicación científica del sistema empleado para su realización, creemos más bien, que sea fruto del paciente y laborioso trabajo de su privilegiada mente.

Sumando sus líneas horizontales, da siempre 260, la suma de las verticales da también 260. Dividiendo el cuadrado en cuatro partes iguales cada fila horizontal o vertical sumará también exactamente 130.

Pero más sorprendente es el hecho insólito de que poniendo un caballo de ajedrez en el número 1, y realizando los movimientos normales de esta pieza, podemos recorrer todos los cuadrados del 1 al 64, en perfecto orden numérico.

En el dibujo adjunto sólo marcamos los saltos del 1 al 16 para no cruzar las líneas. Ustedes pueden seguir el mismo proceso y llegar a completar el juego hasta el número 64.

La expresión mediante la cual se simbolizan las variaciones es: $V^n m$ ó $V^n m$.

El cálculo de las variaciones, lo efectuaremos por la fórmula:

$$V^n m = m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)$$

que indica que el número de grupos de variaciones que se pueden formar equivale al producto de tantos factores decrecientes, desde m, como indica el número de objetos n que entran a formar parte de cada grupo. Es decir, descomponer el mayor de los números hacia la unidad, tantas veces como indique el menor.

NOTA.—Téngase en cuenta que m, debe ser mayor o igual que n ($m \geq n$) y $m \in R$ y $n \in N$.

Ej.:

$V_5^1 = 5$
$V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$
$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
$V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
$V_5^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$V_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$
$V_{20}^4 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840$
$V_x^3 = x\,(x-1)(x-2)$
V_3^7 = no es posible porque $3 < 7$

NOTA.—Es posible que en cálculo superior se presenten expresiones a desarrollar como las siguientes, que admiten posibilidades operativas, independientemente de lo expuesto.

$$V_{-2}^3 = (-2)\,(-2-1)\,(-2-2) = (-2)\,(-3)\,(-4) = -24$$

$$V_{1/2}^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

A la cantidad de elementos m de que disponemos para formar los distintos grupos se les llama **base** de la variación y a la cantidad de elementos n que forman cada grupo, se les llama **orden de variación.**

El orden de una variación puede ser: **monaria** (si los elementos de la base se han tomado de uno en uno), **binaria** (si se han tomado de dos en dos), **terciaria** (si se han tomado de tres en tres), **cuaternaria, quinaria, etc.**

Ej.: En V_8^3, la base es 8 y el orden 3.

Solución al problema de los caramelos de la pág. 340

Este es algo parecido al problema de los calcetines que pusimos en los primeros números. Veamos.

1.° Con tres pesetas, pueden salir o los tres de naranja o los tres de limón, de esta forma ya tiene solucionado el problema. Mínimo TRES PESETAS.

2.° Puede sacar dos de naranja y uno de limón, o viceversa, tiene que meter en la maquinita otra moneda que ya es la cuarta para que la salga otro, que al ser del mismo del que tiene dos, ya está solucionado el problema y con CUATRO PESETAS.

3.° Puede que salga otro caramelo del que tiene ya uno, y entonces tendrá DOS DE NARANJA Y DOS DE LIMON y tiene que meter otra peseta para que sea cual sea el que salga ya tendrá tres de uno y dos de otro, será entonces, un máximo de CINCO PESETAS.

O sea, solución, un mínimo de *tres* pesetas y un máximo de *cinco*.

Otra cosa sería que a los tres «angelitos» se les ocurriera querer los tres de naranja (o de limón), claro, entonces, al querer los tres de naranja y a la maquinita le da por sacar de limón tendría que preparar el bolso para tener al menos *dos pesetas más* que caramelos de limón tenga la máquina.

Solución al problema de los escarabajos de la pág. 344

Se puede realizar por medios aritméticos, pero creemos que el alumno ya sabe manejar de sobra el álgebra y lo haremos así. LLamaremos

y = arañas x = escarabajos

de donde $x + y = 10$

las x (escarabajos lo multiplicaremos por 6 patas) las y (arañas lo multiplicaremos por 8 patas) y así resulta la segunda ecuación.

$6x + 8y = 74$

operemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 6x + 8y = 74 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 10 - y \\ x = \dfrac{74 - 8y}{6} \end{array} \Big\{ 10 -$$

$$- y = \frac{74 - 8y}{6}$$

$$60 - 6y = 74 - 8y\,;\; 2y = 14\,;\; \boxed{y = 7}$$

ya sabemos que hay siete arañas sustituimos, y por 7, y tenemos:

$x + 7 = 10\,;\; x = 10 - 7 = 3\;\boxed{x = 3}$

Comprobemos:

$6x + 84 = 74$

Sustituyamos.

$6x3 + 8x7 = 74$
$18 + 56 = 74$

$\boxed{74 = 74}$

3.—FORMACION DE LAS VARIACIONES

Anteriormente hemos visto cómo se realiza el cálculo de las variaciones, ahora vamos a estudiar cómo se forman los distintos grupos de variaciones.

La formación de los grupos se suele desarrollar mediante dos procedimientos:

A) **Formación ordinaria.** Consiste en ir obteniendo todos los grupos que empiezan por cada elemento, hasta agotar las posibilidades.

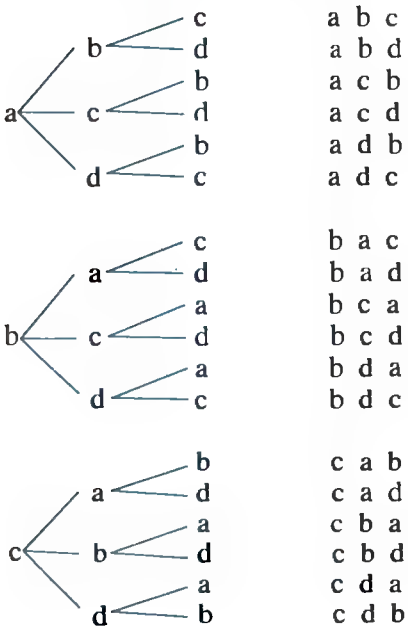
Ej.: Formar los grupos de variaciones ternarias con los elementos abcd.

a b c	a b d	a c d
a c b	a d b	a d c
b c a	b c d	b a d
b a c	b d c	b d a
c a b	c a d	c b d
c b a	c d a	c d b
d a b	d a c	d b c
d b a	d c a	d c b

$V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ grupos

B) **Formación por diagrama en árbol.** Consiste en hacer un gráfico ramificado que cubra las posibilidades de obtención de todos los grupos.

Ej.: Formar los grupos de variaciones ternarias con los elementos abcd.



$V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ grupos

El nivel medio de la apreciación de las artes y de sentido artístico general, es hoy incomparablemente superior al que disfrutaron las gentes que vivieron en nuestro Siglo de Oro.

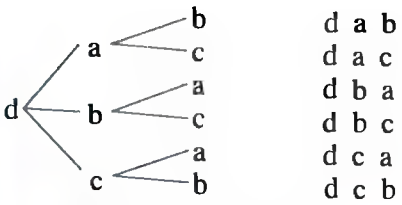
Entonces eran únicamente los reyes y los magnates quienes por su mayor educación podían disfrutar y apreciar debidamente las obras de arte de los escultores, arquitectos, pintores célebres.

Hoy todos podemos cultivar alguna bella afición y sentirnos emocionados ante alguna bella obra.

El arte ha de ser una unión de emoción y sinceridad y si no podemos llegar a los niveles altísimos de los genios sí está a nuestro alcance la labor humilde hecha con la ingenuidad de los artistas sencillos, hoy que todo se industrializa sería bello que volvieran a florecer en los pueblos y aldeas las actividades de los ceramistas, talladores de madera, de los humildes constructores de arcones, los botijos que con sus formas caprichosas sacian nuestra sed.

En un restaurante, un cliente se encontró una mosca en un plato de sopa. Llama al camarero y después de comunicarle tal anomalía éste se lleva el plato y vuelve con otro lleno de sopa. Viene también el dueño del local a darle excusas por tal situación. Después de aceptar éstas, el cliente se pone a comer, se detiene y ... rápidamente vuelve a llamar al dueño del local haciéndole ver con las más graves palabras la falta de seriedad de su restaurante y su poca limpieza ya que: ¡le habían quitado la mosca y le habían traído la misma sopa en otro plato! ¿Cómo pudo saber esto? Solución muy sencilla:

Antes de decirle al camarero la existencia de la mosca vertió en dicha sopa gran cantidad de sal, y así nada más probarla pudo reconocer que era la misma.



d a b
d a c
d b a
d b c
d c a
d c b

NOTA.—Téngase en cuenta que en las variaciones, los grupos a formar son válidos cuando se diferencien por los dos criterios: naturaleza y orden.

Ej.: Cuantas clasificaciones posibles pueden resultar de la prueba de velocidad de 8 corredores en un velódromo, si se clasifican 5.

No hay duda que los grupos de clasificación constan de 5 elementos. Estos grupos tienen la posibilidad de diferenciarse por naturaleza (que existan corredores en una clasificación que no estén en otra) y por orden (dos clasificaciones con los mismos corredores pueden ser distintas por el orden de llegada), de lo que se deduce que los grupos reúnen las características suficientes de las variaciones.

$V_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6.720$ clasificaciones.

Ej.: Con 5 bolas numeradas del 1 al 5, cuántos números distintos de tres cifras podemos formar.

Cada número será un grupo que constará de tres elementos.

Estos grupos se pueden diferenciar por naturaleza (obsérvese que los números 123 y 124 son distintos por tener números distintos) y por orden (obsérvese que los números 123 y 321 son distintos a pesar de tener los mismos elementos), es decir, se trata de variaciones.

$V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números.

Ej.: Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con las cifras, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Téngase en cuenta que es un problema similar al anterior con la única diferencia que cuando el 0 esté a la izquierda de las otras dos cifras, los números que se obtienen son de dos cifras, y no de tres por lo que habrá que descontar éstos a la totalidad (excluyendo el cero que será fijo a la izquierda).

$V_{10}^3 - V_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 720 - 72 = 648$ números.

Ej.: Cuántos objetos son necesarios, para formar con ellos, 210 variaciones binarias.

Llamando x al número de objetos, podemos plantear la ecuación:

$V_x^2 = 210.$

$x\,(x-1) = 210;\ x^2 - x = 210;\ x^2 - x - 210 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 440}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} = \begin{cases} 11 \\ -10 \end{cases}$$

(No vale, no pueden existir objetos negativos)

$x = 11$ objetos.

Ej.: Resolver la ecuación: $V_{m,2} + V_{m-2,2} - V_{m-4,2} = 98$

$m(m-1) + (m-2)(m-3) + (m-4)(m-5) = 98$

$m^2 - m + m^2 - 3m - 2m + 6 + m^2 - 5m - 4m + 20 = 98$

$3m^2 - 15m - 72 = 0;\ m^2 - 5m - 24 = 0;$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{5 \pm 11}{2} =$$

$$= \begin{cases} 8 & m = 8 \\ -3 & m = -3 \end{cases}$$

4.—VARIACIONES CON REPETICION

Anteriormente habíamos supuesto que en los grupos de variaciones no se podía repetir ningún elemento, es decir, estábamos tratando las llamadas variaciones sin repetición u ordinarias.

Si suponemos ahora que un elemento cualquiera se puede incluir todas las veces que queramos en los grupos de variaciones, obtendremos una cantidad de grupos superior a los que reproducían las variaciones sin repetición.

Por supuesto, aún teniendo en cuenta la posibilidad de que se repitan elementos, los grupos de variaciones con repetición, participan de las mismas características de los grupos de variaciones sin repetición, es decir, que se siguen conservando los criterios de **naturaleza y orden** para distinguir a los grupos.

Simbolizaremos las variaciones con repetición por:

$$V^{I}_{m,m} \text{ ó } RV^{n}_{m}.$$

Su cálculo se efectúa mediante la expresión:

$$RV^{n}_{m} = m^n$$

NOTA.—Téngase en cuenta que en las variaciones con repetición, m pueden ser mayor, menor o igual que n.

Ej.: $RV^{2}_{5} = 5^2 = 25$ $\qquad V^{I}_{x,5} = x^5$

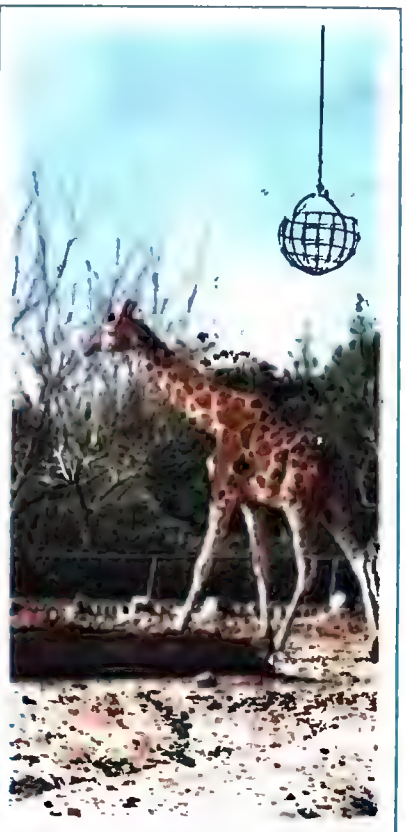
$V^{I}_{7,3} = 7^3 = 343$ $\qquad RV_{6,x} = 6^x$

5.—FORMACION DE LAS VARIACIONES CON REPETICION

Visto el cálculo de las variaciones con repetición, vamos a estudiar cómo se forman sus grupos.

La formación de estos grupos se suele desarrollar por dos procedimientos.

A) Formación ordinaria. Obtenemos todos los grupos que comienzan por cada elemento hasta agotar las posibilidades, y se incluyen luego los grupos con repetición.



En el año 1850 el Continente Africano conoce los grandes viajes y las expediciones que lo exploraron de una forma más científica. Son famosas las que realizaron el alemán Barth que recorrió 16.000 Km cruzando el Sahara y descubriendo nuevos lugares, y otra por el Sur de Africa a cargo del misionero escocés Livingstone con fines evangelizadores que explora desde el Ecuador al Cabo y desde el Atlántico al Índico compuesta de tres viajes, el primero entre 1840-1856, el segundo entre 1858 y 1864 y el tercero iniciado en 1866 que fué el más penoso y en el curso del cual después de tres años sin noticias suyas llegó a Europa la nueva de la pérdida en la selva, o quizás la muerte del famoso explorador.

Se organizaron varios grupos de auxilio, uno de los cuales encabezado por el periodista Stanley, lo encontró enfermo en la zona de los grandes lagos. Cuando el periodista regresó a Londres dejó muy mejorado a Livingstone y dispuesto a seguir hacia la cuenca del Lulaba; cuando estaba próximo al lago Bargüe lo recayó en la enfermedad y murió.

Durante sus viajes combatió el tráfico de esclavos.

Un profesor, al llegar a su casa, se encuentra a su esposa en la cocina y preparándose para freír tres filetes: uno para su esposo, otro para la hija y otro para ella. Los filetes son igual de grandes, pero con tan mala fortuna que sólo caben DOS en la sartén y se tarda 10 minutos en freír cada filete por un lado. Al meter dos filetes en la sartén, se tardan por tanto, 20 minutos en freírlos, y después otros 20 minutos en freír el tercer filete por las dos caras. En total 40 minutos en freirlos y por lo tanto hasta dentro de 40 minutos no estará la comida.

¡Yo los puedo freír en sólo 30 minutos! dijo el profesor. ¡Ya salió el «cocinilla». Toma la sartén y los fríes tú!, contestó la esposa. ¿Cómo pudo hacerlo?

Solución en el próximo número pág. 400

Ej.: Formar los grupos de variaciones ternarias con los elementos abcd.

Con ningún elemento repetido

a b c	a b d	a c d
a c b	a d b	a d c
b c a	b c d	b a d
b a c	b d c	b d a
c a b	c a d	c b d
c b a	c d a	c d b
d a b	d a c	d b c
d b a	d c a	d c b

Con dos elementos repetidos

a a b	a a c	a a d
a b a	a c a	a d a
a b b	a c c	a d d
b b a	b b c	b b d
b a b	b c b	b d b
b a a	b c c	b d d
c c a	c c b	c c d
c a c	c b c	c d c
c a a	c b b	c d d
d d a	d d b	d d c
d a d	d b d	d c d
d a a	d b b	d c c

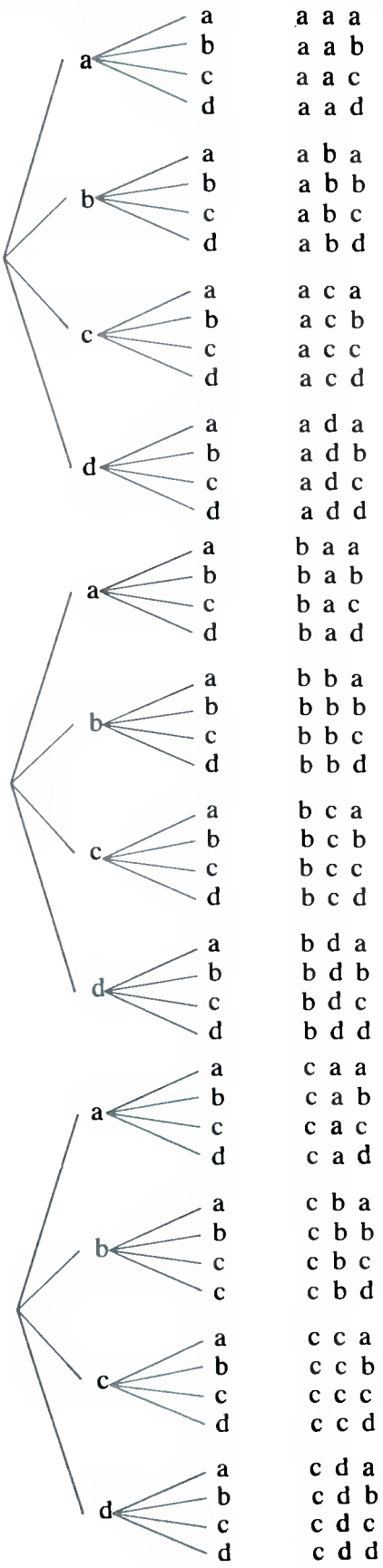
$R\ V_4^3 = 4^3 = 64$ grupos

Con tres elementos repetidos

a	a	a
b	b	b
c	c	c
d	d	d

B) Formación por diagrama en árbol. Consiste en ramificar un gráfico que cubra las posibilidades de obtención de todos los grupos.

Ej.: Formar los grupos de variaciones ternarias con los elementos a b c d.

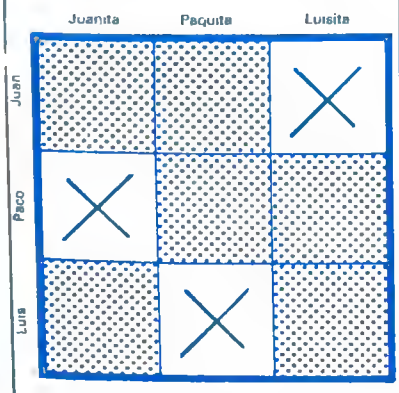


La civilización del siglo XX, no se concibe sin el uso intensivo de las matemáticas, nadie extiende un cheque ni revisa su cuenta corriente sin utilizar la misma aritmética, inventada por los mesopotamios e hindúes. Nadie construye edificios sin emplear las técnicas elementales que ya descubrieron los geómetros egipcios, los primitivos griegos ya intuyeron que la tierra necesariamente tendría forma de esfera.

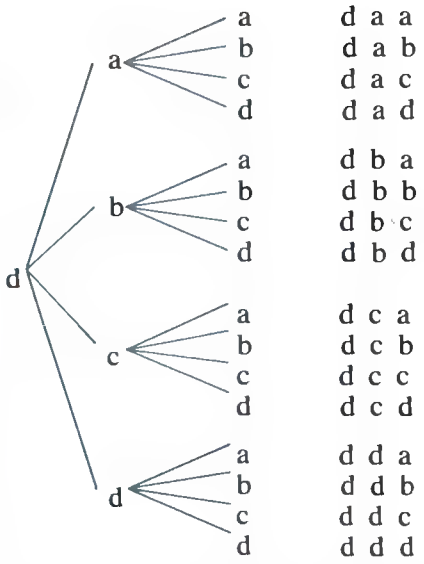
Las matemáticas clásicas y su uso favorecieron el espíritu aventurero de la época de los descubrimientos. Colón fué un enamorado de las matemáticas, aplicadas a la astronomía y a la geografía conocida en su época.

Más adelante los hombres que iniciaron la revolución Industrial aplicaron para construir sus máquinas los principios y las investigaciones de Galileo, Newton y otros muchos, hasta la investigación atómica que descansa en la teoría de la Relatividad de Einstein. Grandes matemáticos son los que hoy en día ayudan a calcular les conquistas espaciales.

Juan, Paco y Luis, están bailando con Juanita, Paquita y Luisita, pero estando Juan bailando con Luisita, le dice a ésta: ¿Te das cuenta de que ninguno de los tres varones estamos bailando con la que se llama igual que nosotros o viceversa? Al decirle esto Juan a Luisita, ya sabemos que Paco no puede estar bailando con Paquita, sino que tiene que estar forzosamente bailando con Juanita y Luis con Paquita. Esto es fácil. Pero como hoy están muy de moda en periódicos y revistas estos problemas de deducción, te vamos a dar una pauta para que los deduzcas. Haces un recuadro y en él vas tachando lo que **no puede ser** y al final sale sola la solución.



Continúa en la página siguiente.



Ej.: Una línea de autobuses utiliza 8 autobuses. Averiguar de cuántas formas se puede hacer un viaje de ida y vuelta en los casos siguientes:

a) El autobús de ida ha de ser distinto que el de vuelta.
b) Es indiferente que el autobús de ida y de vuelta sea el mismo o distinto.

a) Téngase en cuenta que los grupos de este problema están formados por dos elementos (autobuses de ida y autobuses de vuelta). Estos grupos pueden ser diferentes por naturaleza (existe la posibilidad de no utilizar en los distintos viajes de ida y vuelta, la misma pareja de autobuses) y por orden (no es lo mismo utilizar para la ida un autobús y para la vuelta otro, que al contrario).

Pues bien, como los grupos tienen aptitud para diferenciarse por naturaleza y orden, se trata de variaciones sin repetición, ya que dice el apartado del problema que deben ser distintos los autobuses de ida y de vuelta.

$$V_8^2 = 8 \cdot 7 = 56 \text{ formas}$$

b) Al poder ser el autobús de ida y vuelta el mismo, no hay duda que se pueden obtener más formas de viajar que en el apartado a). Es decir, observamos que en este caso existe la posibilidad de repetición en los grupos, luego se trata de variaciones con repetición.

$$R\ V_8^2 = 8^2 = 64 \text{ formas}$$

Ej.: Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6. Averiguar cuántos números de tres cifras distintas o no se pueden formar.

Dos números cualquiera pueden ser distintos por naturaleza (que uno tenga cifras que no tenga el otro) y por orden (aún teniendo las mismas cifras, su colocación indica números distintos), luego se trata de variaciones y como además existe la posibilidad de que en los grupos de números de tres cifras se repitan éstas, se trata de variaciones con repetición.

$$R\ V_6^3 = 6^3 = 216 \text{ números.}$$

Ej.: Con las cifras 1, 2, 3 y 4, cuántos números de cinco cifras se pueden formar.

No hay duda que se trata de variaciones con repetición ya, que al tener cuatro cifras y tener que formar números de cinco cifras, alguna de éstas deberá estar siempre repetida (es obvio que los grupos se diferencian por naturaleza y orden).

$$R\ V_4^5 = 4^5 = 1.024 \text{ números.}$$

Ej.: Averiguar la cantidad de apuestas diferentes que se pueden hacer en las quinielas, jugándose 14 partidos.

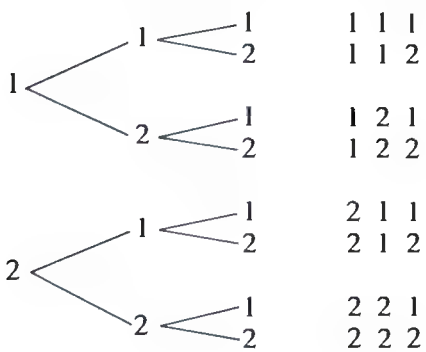
Los elementos ya se sabe son 1, x y 2. Pensemos que en cada grupo o apuesta estos elementos se utilizan 14 veces, repetidos o no.

Dos apuestas pueden ser distintas por naturaleza (si no tienen los mismos elementos) o por orden (si tienen los mismos elementos con distinta colocación), luego se trata de variaciones con repetición.

$$R\ V_3^{14} = 3^{14} = 4.782.969 \text{ apuestas}$$

Ej.: Hallar todos los números de tres cifras que se puedan obtener con las cifras 1 y 2.

Los vamos a localizar mediante un diagrama en árbol.



$$RV_2^3 = 2^3 = 8 \text{ números}$$

6.—PERMUTACIONES

Se entiende por permutaciones, a los diferentes grupos que se pueden formar con una cierta cantidad de elementos m, tomados m a m, teniendo en cuenta únicamente el criterio de **orden** de los elementos en los grupos. Obsérvese que en cada grupo de permutaciones participan todos los elementos de que disponemos. La expresión mediante la cual se simbolizan las permutaciones es: V_m^m, Pm, m ! (m factorial) ó $\underline{\lfloor m}$.

El cálculo de permutaciones se realiza por la siguiente fórmula:

$$P\ m = m\ (m-1)\ (m-2) \cdots 1 \quad m \in N$$

que indica que el número de grupos de permutaciones que se pueden obtener, equivale al producto de todos los factores decrecientes, desde m, hasta la unidad.

Así: Como Juan no baila con Juana, ni Paco con Paquita, los tachas todos. Como se lo dice Juan a Luisita mientras bailan, ya tenemos la primera pareja, una cruz en su recuadro correspondiente y además podemos borrar el recuadro correspondiente en esa misma línea entre Juan y Paquita. Ya nos quedan: Paco y Luis y Paquita y Juanita. En la horizontal de Paco tenemos a Juanita y Luisita. Como Luisita está bailando ya con Juan, borramos a ésta. Por lo tanto Paco baila con Juanita. En la horizontal de Luis tenemos en puntos dos casillas, la de Juanita y la de Paquita. Como Juanita ya está bailando con Paco, borramos la primera casilla y por lo tanto nos queda que Luis está bailando con Paquita.

Te lo he puesto fácil, podía también ponértelo más enrevesado metiendo otra nueva pareja que fueran Antonio y Antoñita, pero tenía que hacerte al mismo tiempo alguna otra aclaración como que Luis no se habla con Antoñita, que a su vez es hermana de Paco y baila con su novio, por ejemplo, o dos parejas, tres, etc.

Esto es como cuando vemos una película de misterio y lo primero que decimos es: ¡Fulanito es el asesino! en vez de decir menganito **no** es el asesino y tampoco zutanito y así ir descartando los que no son, hasta que nos queda el que verdaderamente es el asesino.

Esto os enseñará también a no actuar con precipitación, pensar, meditar las situaciones y llegaréis al fin deseado.

Gustavo Doré es un dibujante que refleja en su obra el vivir de su época, niño precoz que a los cinco años sin saber leer, sorprendía a su familia con dibujos muy aceptables y con expresiones caricaturescas que sólo en un cerebro adulto se suelen dar.

Pasando el tiempo llegó a ser el más formidable ilustrador de su tiempo. Las publicaciones de entonces sólo reproducían grabados y en este campo del periodismo y de las novelas históricas es donde se manifiestan sus dotes de observación y su extraordinaria fantasía.

Ya en la cumbre de su fama, visita España y durante once años publica sus impresiones gráficas en este tiempo y simultáneamente realiza las ilustraciones del Quijote, este libro que une la transcendencia simbólica con su inagotable realismo venía como anillo al dedo al fantástico ilustrador. Doré se entrega en este trabajo y no pierde ningún matiz. Dibuja escenas, colofones, cabeceras y láminas, todas ellas a pluma.

Quizá sea ésta su mejor obra, el libro fué para él su consagración definitiva. Hoy día se siguen publicando ediciones de gran lujo con sus maravillosos dibujos.

Es decir, descomponer m totalmente hasta la unidad.

NOTA.—Téngase en cuenta que: $V_0^0 = P0 = 0\,! = 1$ y acéptese con todas las consecuencias operativas.

Ej.: $P5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ $\quad Px = x\,!$

$V_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $\quad P3/2 =$ no es posible $\frac{3}{2} \notin N$

$4\,! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ $\quad P(-2) =$ no es posible $-2 \notin N$

La primera ordenación de elementos que dé origen a los restantes grupos de permutaciones recibe el nombre de **permutación principal.**

En cualquier grupo de permutaciones, diremos que dos elementos forman **sucesión,** cuando prescindiendo de los restantes del grupo, éstos siguen el orden establecido en la permutación principal; si no es así se dice que forman una **inversión.** Para hallar el número de inversiones de una permutación, es conveniente comparar cada elemento con todos los que le siguen. El número de inversiones de una permutación recibe el nombre de **clase.** Cuando el número de inversiones es par, se dice que la permutación es de **clase par,** y cuando el número de inversiones es impar, la permutación es de **clase impar.**

Cuando en una permutación cualquiera se invierten dos elementos, ésta cambia de clase.

Ej.: Si a b c d es la permutación principal:

a b c d tiene 0 inversiones (clase par)
b a c d tiene 1 inversión: b a (clase impar)
a d b c tiene 2 inversiones db, dc (clase par)
c b d a tiene 4 inversiones cb, ca, ba, da (clase par).

7.—FORMACION DE LAS PERMUTACIONES

Ya hemos visto que Pm coincide o es lo mismo que V_n^m. Pues bien, la formación de las permutaciones es similar a la de las variaciones. La única diferencia sustancial es que en todos los grupos de permutaciones, van a estar incluidos todos los elementos de que disponemos.

Ej.: Formar los grupos de permutaciones con los elementos a b c d.

a	b	c	d	a b c d
		d	c	a b d c
	c	b	d	a c b d
		d	b	a c d b
	d	b	c	a d b c
		c	b	a d c b
b	a	c	d	b a c d
		d	c	b a d c
	c	a	d	b c a d
		d	a	b c d a
	d	a	c	b d a c
		c	a	b d c a
c	a	b	d	c a b d
		d	b	c a d b
	b	a	d	c b a d
		d	a	c b d a
	d	a	b	c d a b
		b	a	c d b a
d	a	b	c	d a b c
		c	b	d a c b
	b	a	c	d b a c
		c	a	d b c a
	c	a	b	d c a b
		b	a	d c b a

$P4 = V_4^4 = 4\,! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ grupos.

Ej.: Hallar cuantas palabras que tengan o no sentido, se pueden formar con las letras de la palabra Europa.

Los grupos a formar en este caso son las palabras posibles y los elementos las letras de la palabra Europa.

Es natural que en cada grupo de letras van a estar todas las de la palabra Europa, luego no existe distinción por el criterio de naturaleza en los grupos, pero dependiendo de la disposición de estas letras, van a surgir palabras distintas, que se van a diferenciar por el criterio de orden, luego se trata de permutaciones.

En la Edad Media la actividad científica fué ocupada preferentemente por la burguesía que empezó a considerar el estudio como un gran bien, surge así un tipo de científico que el medio social acepta y hasta festeja, pero a quien no se retribuye, obligándole a buscar protección de algún mecenas de la Iglesia o de la Corte.

En la Corte papal o de los príncipes de esta época se reúnen matemáticos, médicos, astrólogos, ingenieros, técnicos en el arte militar, en obras hidráulicas.

Esta circunstancia pone al mismo nivel al técnico, al científico y al artista, entremezclando a veces sus trabajos y creando algunas obras fundamentalmente técnicas en las que no se olvida la belleza.

El interés por las nuevas técnicas que todos contemplan con nuevos ojos y estudian en conjunto en un bien para la humanidad que todavía se admira ante obras de estos equipos de grandes sabios.

Reparto de terreno

Un labrador dejó en herencia a sus cinco hijos un terreno en forma cuadrada y que medía 1.000 m de lado. Cada uno de los hijos sabía que al tener el terreno 1.000 de lado, le correspondían 200.000 m. cuadrados. Había una cláusula en el testamento la cual decía que las partes tenían que ser exactamente iguales. ¿Cómo dividir un terreno cuadrado en 5 partes iguales?, dijo uno de los hermanos, si fueran cuatro partes sería fácil, pero cinco partes...

Otro de los hermanos indicó que era tan fácil dividirlo en cinco como en cuatro. ¿Como hacerlo?

La solución en pág. 400

Como disponemos de 6 elementos (letras)

$$P6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ palabras}$$

Ej.: En una exposición de automóviles, hallar de cuántas formas diferentes se pueden colocar en línea 5 automóviles.

No hay duda de que cada forma de colocarlos va a ser un grupo y que estos grupos únicamente tendrán posibilidad de diferenciarse por el criterio de orden, luego se trata de permutaciones.

$$P\,5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ formas}$$

Ej.: Simplificar la expresión $\dfrac{m\,!\,(n-1)\,!\,(n^3-n)}{n\,!\,(m-1)\,!\,(mn-m)}$

La simplificación de este tipo de expresiones, requiere un exquisito cuidado. Como norma general, es conveniente transformar en producto las expresiones y en el caso de expresiones factoriales tener tendencia a descomponer de mayor a menor. Obsérvese que:

$$m\,! = m\,(m-1)\,!$$
$$n\,! = n\,(n-1)\,!$$
$$n^3 - n = n\,(n^2-1) = n\,(n+1)\,(n-1)$$
$$mn - m = m\,(n-1)$$

y sustituyendo en la expresión general, obtenemos:

$$\frac{m!\,(n-1)!\,(n^3-n)}{n!\,(m-1)!\,(mn-m)} = \frac{m\,(m-1)!\,(n-1)!\,n(n+1)\,(n-1)}{n(n-1)!\,(m-1)!\,m(n-1)} = n+1$$

8.—PERMUTACIONES CIRCULARES

Las permutaciones anteriores consideran alineados a los elementos en cada grupo, pero si ahora consideramos la posibilidad de que estos elementos se dispongan de forma circular en cada grupo, es sabido que la simple rotación de los elementos daría como resultado la coincidencia de grupos que pudiésemos considerar como distintos, los grupos cuya coincidencia no pudiera lograrse son los que forman las permutaciones circulares y que naturalmente se diferencian únicamente por el criterio de orden, como es norma en todo tipo de permutaciones.

La expresión mediante la cual se simbolizan las permutaciones circulares es $P_{(m)}$.

El cálculo de la totalidad de los grupos que podemos obtener con m elementos se efectúa mediante la expresión:

$$P_{(m)} = P(m-1) = (m-1)\,!$$

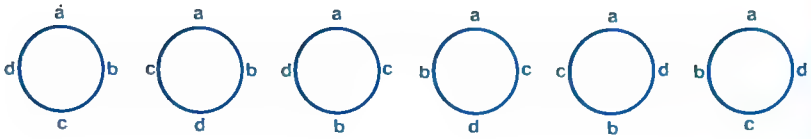
Ej.: De cuántas formas distintas se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa.

$$P_{(5)} = P(5-1) = 4\,! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ formas}$$

Ej.: De cuántas formas distintas se puede realizar una partida de cartas entre 4 jugadores.

$$P④ = P(4 - 1) = 3\,! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ formas}$$

Obsérvese las seis formas de jugar, en el gráfico adjunto. Llamando a los jugadores a, b, c y d.



9.—PERMUTACIONES CON REPETICION

Anteriormente hemos tratado todos los casos en los que los elementos que formaban parte de los grupos de permutaciones, no estaba ninguno repetido. La situación que tratábamos era la de permutaciones ordinarias. Pues bien, la situación ahora es que vamos a tener una cierta cantidad de elementos y algunos de ellos repetidos; así nos surgirán las permutaciones con repetición que por supuesto siguen conservando las mismas características de las permutaciones ordinarias; es decir, que sus grupos se diferencian por el criterio de **orden.**

Es lógico pensar que al existir elementos repetidos, van a disminuir las posibilidades de formación de los grupos.

Si imaginamos que hay α, β, γ, ..., elementos repetidos, simbolizaremos las permutaciones con repetición así:

$$RP_m^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} \text{ ó } P_m^{!\,\alpha,\beta,\gamma,\cdots} \text{ ó simplemente } P_m^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots}$$

y efectuamos su cálculo, mediante la expresión:

$$RP_m^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} = \frac{m\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\,\ldots}$$

NOTA.—Siempre se verifica que la suma $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ debe ser menor o igual que m.

Ej.: $RP_7^{2,3} = \dfrac{7\,!}{2\,!\,3\,!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 420$

10.—FORMACION DE LAS PERMUTACIONES CON REPETICION

Los grupos de permutaciones con repetición, ya hemos apuntado que van a ser menos que si fuesen permutaciones ordinarias, ya que al existir elementos repetidos, la permutación de dos de ellos en un grupo, va a dar lugar al mismo grupo, y no vamos a tener posibilidad de evaluar la diferencia entre los dos grupos.

Los últimos siglos medievales fueron siglos de largos viajes, terrestres primero y oceánicos más tarde. A los viajes terrestres que obedecían a motivos comerciales se agregan en este tiempo los motivos diplomáticos. Un viaje entre comercial y diplomático fué el realizado por la familia Polo, hermanos Venecianos que junto a Marco, hijo de uno de ellos que en 1271 parten de su país y emprenden un largo viaje en el que se emplean veinticinco años. Cruzan toda Asia llegando hasta la corte de los mongoles en Pekín, donde Marco es nombrado asesor y con este cargo recorre el sur asiático y el Tibet. Vuelve a Venecia donde contingencias no muy claras le llevaron a la cárcel. Allí escribió el relato de sus viajes, y su estancia en China.

Aunque al principio el manuscrito fué acogido con indiferencia y escepticismo, más adelante y en especial cuando apareció impreso, su influencia fué en aumento.

A partir del siglo XII se inició la fundación de Universidades o Escuelas especializadas en estudios superiores.

Los Reyes y los Papas las dieron carácter oficial, influyendo grandemente en la juventud en el sentido de apartar a los jóvenes de lo que era tan corriente en aquella época, la afición a dedicarse por entero a las guerras.

Estas escuelas cultivaron todas las ciencias conocidas, matemáticas, astronomía y lenguas. En Europa occidental se escribía en latín y en la oriental en griego; el latin fué la base, pero las invasiones por una parte y la natural corrupción de los vocablos hecha por el pueblo, crearon una serie de dialectos locales que llevaron a una gran anarquía.

Durante siglos posteriores se tretó de remediar este mal. En Italia, Dante fijó y depuró en gran parte el idioma mediante sus magníficas producciones, perfeccionándolo Petrarca y Bocaccio.

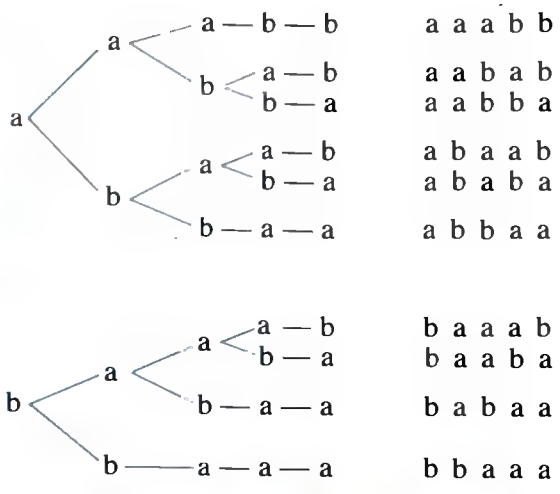
En España se fijó o depuró en parte con el código de las siete partidas de Alfonso X el Sabio y con el poema del Cid.

En Francia se formaron dos idiomas, el Oui en el Norte que es, con pequeñas diferencias el actual francés y el Oc, actual Lemosín, una variedad del cual es el Catalán.

Es decir, que tanto el castellano, el italiano, el francés que el Lemosín y el catalán, son idiomas derivados de un mismo tronco, la lengua latina.

La formación de las permutaciones con repetición se realiza de la misma forma que las permutaciones ordinarias, teniendo en cuenta la eliminación de los grupos que sean iguales por permutar elementos iguales en la misma posición.

Ej.: Hallar los grupos de permutaciones que se pueden formar con los elementos a, a, a, b, b.



a a a b b	b a a a b	
a a b a b	b a a b a	
a a b b a	b a b a a	
a b a a b	b b a a a	
a b a b a		
a b b a a		

Ej.: Con las letras de la palabra BALADA, averiguar cuántas palabras distintas se pueden formar, que tengan o no sentido. Obsérvese que los grupos que podemos formar, es decir, cada palabra, se diferencian por el criterio de orden, luego se trata de permutaciones y además con repetición, ya que la A está repetida tres veces.

$$RP_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ palabras.}$$

Ej.: Cuántos números de siete cifras se pueden formar con dos 3, cuatro 5 y un 6.

Estamos ante un caso claro de permutaciones con repetición. Son permutaciones porque los grupos de números nada más que se diferenciarán por el criterio de orden y con repetición por tener cada grupo elementos repetidos.

$$RP_7^{2,4} = \frac{7!}{2!\,4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 105 \text{ números.}$$

Ej.: Cuántos números mayores de 100.000 se pueden escribir con las cifras 0, 3, 3, 4, 5, 6, podremos formar:

$$RP_6^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 360 \text{ números.}$$

Pero téngase en cuenta que cuando el 0 vaya delante de todos, los números que se formen así, no son mayores de 100.000, es decir, de seis cifras, sino menores de 100.000, es decir, de cinco cifras. Por lo tanto, había que descontar todos estos números de cinco cifras, que se formarán con las 3, 3, 4, 5, 6 cifras.

$$RP_5^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60 \text{ números.}$$

Luego la cantidad de números pedidos mayores de 100.000 que se puedan formar con las cifras 0, 3, 3, 4, 5, 6 es:

$360 - 60 = 300$ números.

11.—DESCOMPOSICION DE m ! EN FACTORES PRIMOS

Cualquier número de la forma m ! puede llegar a tener muchos factores primos, ya que su cálculo se manifiesta como un producto descendente hasta la unidad (obsérvese que $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ posee los factores primos 2, 3, 4, 5).

Pues bien, la descomposición en factores primos de m ! motivará el calcular los exponentes de tantos factores primos p como posea el número m ! ($p \leq m$).

A continuación vamos a estudiar las dos formas, a través de las cuales, podemos llegar a localizar el exponente de cualquier factor primo de m !

La caracterografía está llamada a ser una ciencia de identificación con grandes posibilidades de exactitud. Es usada por la policía para reconstruir rostros de personas desconocidas a las que se precisa buscar.

La memoria visual está sujeta a grandes errores, dándose el caso de que varias personas, cuando han visto a otra y tratan de describirla ofrecen versiones totalmente contradictorias.

Para conseguir mejores resultados se forma un cuadro compuesto por rasgos independientes del rostro humano que entremezclados según indicaciones de los testigos, perfila y define con la misma nitidez de una fotografía. Existen unos 30 modelos de nariz, 20 clases de orejas, dos docenas de labios, 10 modelos de frente, 40 modelos de ojos, varios tipos de barbillas y de pómulos.

Combinándolos poco a poco y con la colaboración de los testigos, uno sugiere que la frente es más ancha, otro que la oreja es más pequeña, etc., se llega al conocido retrato robot.

La fruta, alimento necesario para la vida del hombre, además de muy rica en vitaminas es suculenta, con sabor variado y agradable, existiendo tanta variedad de ellas que sería rarísimo no encontrar alguna que satisfaciera plenamente a nuestro paladar. En las ferias agrícolas y en especial frutícolas, que se celebran periódicamente en cada región, se muestran ejemplares rarísimos, conseguidos a base de cruces entre diferentes variedades y algunos de tamaño descomunal, así se conocen sandías de 91 Kg, piñas de 7 Kg y patatas de 4 Kg. También se recuerda una calabaza de 95 Kg y una gigantesca col de 52 Kg. Todas estas piezas dignas de figurar en un museo si no fuera por lo perecedero de su género fueron perfectamente comestibles.

a) Primera forma

El exponente de cualquier factor primo p del número m ! es el resultado de sumar los cocientes que se obtienen al expresar el número m en el sistema de numeración de base p.

Ej.: Hallar el exponente del 5 en 150 !

Efectuaremos la operación necesaria para cambiar el 150 a la base 5.

$$\begin{array}{llll} 150 & \underline{|5} & & \\ 0 & 30 & \underline{|5} & \\ & 0 & 6 & \underline{|5} \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

exponente del 5=30+6+1=37

b) Segunda forma: El exponente de cualquier factor primo p del número m ! se puede obtener también aplicando la expresión:

$$\text{exponente de } p = \frac{m - s}{p - 1}$$

Donde s = suma de las cifras de m en el sistema de numeración de base p.

Ej.: Hallar el exponente del 5 en 150 !

Expresamos el número 150 en la base 5.

$$\begin{array}{llll} 150 & \underline{|5} & & \\ 0 & 30 & \underline{|5} & \\ & 0 & 6 & \underline{|5} \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

$150 = 1.100 \quad S = 1 + 1 + 0 + 0 = 2$

$$\text{exponente del } 5 = \frac{150 - 2}{5 - 1} = \frac{148}{4} = 37$$

12.—COMBINACIONES

Se entiende por combinaciones a los diferentes grupos que se pueden formar con una cierta cantidad de elementos m, tomados n a n, teniendo en cuenta únicamente el criterio de **naturaleza** de los elementos en los grupos.

La expresión mediante la cual se simbolizan las combinaciones es: C_m^n, Cm, n ó $\binom{m}{n}$ (número combinatorio o coeficiente binómico). El cálculo de las combinaciones, lo efectuaremos mediante las siguientes expresiones:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!}$$

Al número m se le llama numerador o índice superior y al número n se le llama orden o índice inferior.

NOTA.—Obsérvese que en las combinaciones se trata de conjugar las variaciones y las permutaciones. $m \in R$ y $n \in N$.

NOTA.—Téngase en cuenta que $\binom{m}{0} = 1$ y acéptese con todas las consecuencias operativas.

Ej.: $C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{V_5^3}{P\,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

$$C_6^0 = \binom{6}{0} = 1$$

$$C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7\,!}{4\,!\,(7-4)\,!} = \frac{7\,!}{4\,!\,3\,!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$C_x^3 = \binom{x}{3} = \frac{V_x^3}{P\,3} = \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{6}$$

$$C_5^x = \binom{5}{x} = \frac{5\,!}{x\,!\,(5-x)\,!}$$

$$C_x^y = \binom{x}{y} = \frac{x\,!}{y\,!\,(x-y)\,!}$$

Puede decirse que el saber es la respuesta del pensamiento y de la reflexión a la solución inmediata de las incitaciones del medio.

Mientras en el hombre actual el saber está clasificado y generalizado desde un saber de la vida diaria, circunstancial y efímero, hasta un saber científico, sublimado en el conocimiento objetivo y firme. Dentro de las vaguedades que envuelven a todo problema de origen, cabe decir que las primeras manifestaciones del saber humano fueron de índole técnica. Cubiertas estas necesidades se teje la urdimbre de la comunidad social y se establece las bases de la cooperación humana de donde nace el mundo cultural que el hombre superpone al mundo natural que lo rodea.

12.—COMBINACIONES

Se entiende por combinaciones a los diferentes grupos que se pueden formar con una cierta cantidad de elementos m, tomados n a n, teniendo en cuenta únicamente el criterio de **naturaleza** de los elementos en los grupos.

La expresión mediante la cual se simbolizan las combinaciones es: C_m^n, Cm, n ó $\binom{m}{n}$ (número combinatorio o coeficiente binómico). El cálculo de las combinaciones, lo efectuaremos mediante las siguientes expresiones:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!}$$

Al número m se le llama numerador o índice superior y al número n se le llama orden o índice inferior.

NOTA.—Obsérvese que en las combinaciones se trata de conjugar las variaciones y las permutaciones. $m \in R$ y $n \in N$.

NOTA.—Téngase en cuenta que $\binom{m}{0} = 1$ y acéptese con todas las consecuencias operativas.

$$\text{Ej.: } C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{V_5^3}{P\,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$C_6^0 = \binom{6}{0} = 1$$

$$C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7\,!}{4\,!\,(7-4)\,!} = \frac{7\,!}{4\,!\,3\,!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$C_x^3 = \binom{x}{3} = \frac{V_x^3}{P\,3} = \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{6}$$

$$C_5^x = \binom{5}{x} = \frac{5\,!}{x\,!\,(5-x)\,!}$$

$$C_x^y = \binom{x}{y} = \frac{x\,!}{y\,!\,(x-y)\,!}$$

Puede decirse que el saber es la respuesta del pensamiento y de la reflexión a la solución inmediata de las incitaciones del medio.

Mientras en el hombre actual el saber está clasificado y generalizado desde un saber de la vida diaria, circunstancial y efímero, hasta un saber científico, sublimado en el conocimiento objetivo y firme. Dentro de las vaguedades que envuelven a todo problema de origen, cabe decir que las primeras manifestaciones del saber humano fueron de índole técnica. Cubiertas estas necesidades se teje la urdimbre de la comunidad social y se establece las bases de la cooperación humana de donde nace el mundo cultural que el hombre superpone al mundo natural que lo rodea.

Solución al problema de los músicos de la pág. 358.

El m.c.m. de 2 - 3 y 4 es 12, por supuesto.

Al sobrar poniéndolos de 5 en 5, es que tienen que ser los componentes de la banda un múltiplo de 5. Bien. El m.c.m. que es 12, lo vamos multiplicando por 1-2-3-4... etc. y a cada multiplicación le sumamos 1 que era el sobrante

$$12 \times 1 + 1 = 13$$
$$12 \times 2 + 1 = 25$$
$$12 \times 3 + 1 = 37$$
$$12 \times 4 + 1 = 49$$
$$12 \times 5 + 1 = 61$$

Ya no tenemos necesidad de ir multiplicando más ¿No hemos dicho al principio que el pueblo tiene 60 habitantes y que todos los componentes de la banda son de allí? Entonces a la fuerza tienen que ser 25 los músicos.

Solución al problema de los vasos de la página 355

Primero tomó el vaso n.° 2 y vació su contenido en el vaso n.° 7 que estaba vacío y el n.° 2 vuelve otra vez a su sitio, pero vacío.

Segundo, tomó el n.° 4 y vació su contenido en el vaso n.° 9 que estaba vacío, volviendo el vaso n.° 4 a su sitio, pero ya vacío y así tendremos la solución correcta.

Vean los dibujos situados en la parte inferior de la página que lo aclara perfectamente, y observen que:

¡¡Solamente las manos de este humilde camarero, tocaron DOS VASOS!!

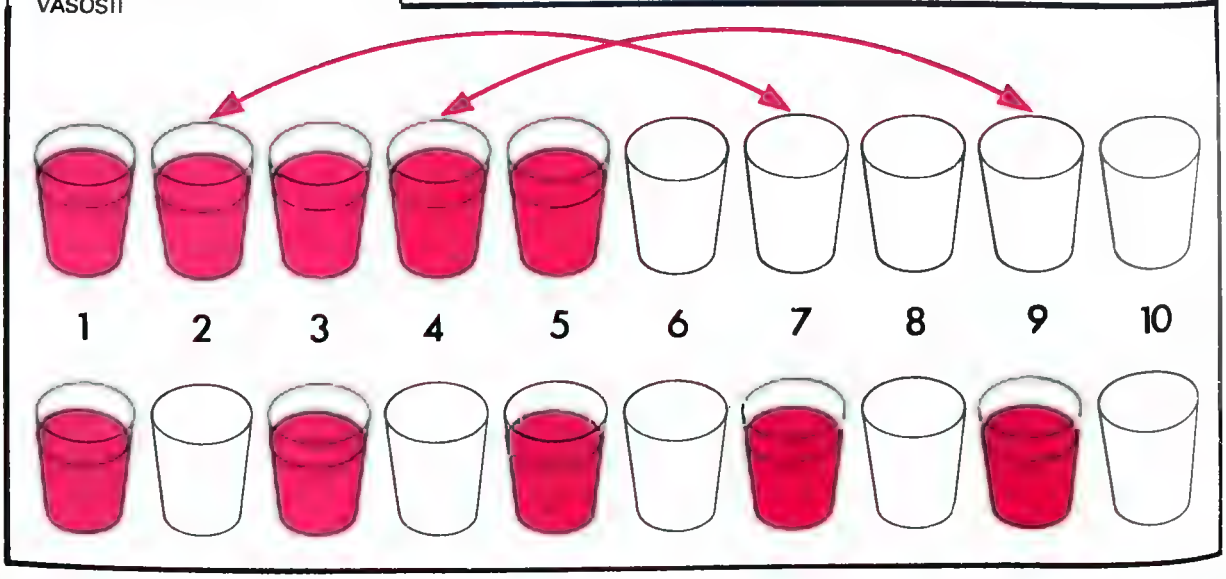
Obsérvese las siguientes particularidades de cálculo:

a) Cuando el índice superior e inferior de una combinación son números, es indiferente su cálculo aplicando $\frac{V_m^n}{P_n}$ ó $\frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!}$ aunque suele ser más cómoda la aplicación V_m^n/P_n.

b) Cuando el índice superior es una incógnita y el inferior un número, podemos seguir igualmente lo dicho en el apartado a).

c) Cuando el índice superior es número y el inferior una incógnita, no nos queda más remedio que aplicar para su cálculo, la fórmula $m\,!/n\,!\,(m-n)\,!$

d) Cuando tanto el índice superior como el inferior son incógnitas, seguiremos igualmente lo dicho en el apartado c).



13.—FORMACION DE LAS COMBINACIONES

Todos los grupos que formemos se deberán distinguir por el criterio de naturaleza.

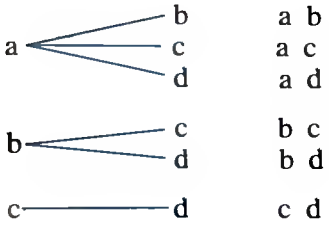
Ej.: Formar los grupos de permutaciones binarias con los elementos a b c d.

Formación por procedimiento ordinario

a b b c c d
a c b d
a d

$C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ grupos.

Formación por diagrama en árbol.



Ej.: Resolver la ecuación: $3C_m^4 = 5C_m^2$.

Desarrollando según $C_m^n = V_m^n/Pn$.

$$3\,\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5\,\frac{m\,(m-1)}{2 \cdot 1}$$

Simplificando

$$\frac{(m-2)\,(m-3)}{8} = \frac{5}{2}\,;\ \frac{m^2 - 2m - 3m + 6}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{m^2 - 5m + 6}{4} = 5 \quad m^2 - 5m + 6 = 20$$

$$m^2 - 5m - 14 = 0;\ m = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5+9}{2} = \begin{cases} 7 \\ -2 \end{cases}$$

Ej.: Resolver la ecuación $V_x^3 = 24\ C_x^2 - 2$

$$x(x-1)\,(x-2) = 24\,\frac{(x-2)\,(x-3)}{2 \cdot 1}, \text{ simplificando}$$

$$x\,(x-1) = 12\,(x-3), \quad x^2 - x = 12x - 36;$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0; \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} =$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

En 1600 los príncipes florentinos reunían en sus palacios a poetas, músicos y compositores, en este ambiente propicio para el arte y tratando de revitalizar la antigua tragedia griega, en la que los actores no hablan sino que recitan, se creó un nuevo estilo, en el que los actores cantan acompañados por orquestas, coros e incluso coreografías.

La primera obra de este estilo fue estrenada en 1594, se llamó Dafne y su partitura se perdió, no así la segunda llamada Eurídice.

Se le dio el nombre de «Opera» a este nuevo género que quería decir «obra» y que a partir de 1650 tomó carácter propio pasando a definir exclusivamente este bello estilo.

En 1640 se abrió en Venecia el primer teatro dedicado al arte lírico, se llamó de San Cassiano, por estar junto a la iglesia del mismo. El primer clásico del género fue Monteverdi, autor de óperas de bella musicalidad, gran fuerza dramática y alto concepto ético. En el siglo XVII se produce la reforma del género al dividirlo en «Opera Bufa» y «Opera Seria», a las que se agregó más adelante la «Semiseria» de la que se considera como modelo «Don Juan», de Mozart.

Muy difícil sería precisar en cuántas materias y ciencias son necesarias las matemáticas, casi podemos decir que en forma más o menos directa influye en todas las actividades de la vida moderna. Desde la medicina en que con una ecuación se puede descubrir el riego sanguíneo en los pulmones, el corazón o en el cerebro, hasta en las técnicas militares con los complicados problemas de tiro que plantean las nuevas armas, pasando por los cálculos de las naves espaciales y la derrota (camino) que tiene que seguir por el firmamento indicado por unas computadoras en una décima de segundo. Si bien el matemático necesitó meses para programarlas. En suma, las Matemáticas han sido el origen de todas las ciencias.

En el siglo en que vivimos, bien podemos afirmar que la importancia de las Matemáticas aumenta día a día, ofreciendo un brillante futuro a los que realmente las dominan ya que gran parte de los empleos del mañana serán derivados o influidos grandemente por esta ciencia.

Ej.: Resolver la ecuación: $(x^x - 2) + \binom{x+1}{x-1} = 16$

Desarrollo según $C_m^n = m\,!/n\,!\,(m-n)\,!$

$$\frac{x\,!}{(x-2)![x-(x-2)]!} + \frac{(x+1)\,!}{(x-1)![x+1-(x-1)]!} = 16, \text{ operando.}$$

$$\frac{x\,!}{(x-2)\,!\,2\,!} + \frac{(x+1)\,!}{(x-1)\,!\,2\,!} = 16, \text{ simplificando.}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\,!}{(x-2)\,!\,2\,!} + \frac{(x+1)x(x-1)\,!}{(x-1)\,!\,2\,!} = 16;$$

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)x}{2} = 16$$

$$\frac{x(x-1)+(x+1)x}{2} = 16; \quad x(x-1)+(x+1)\,x = 32;$$

$$x^2 - x + x^2 + x = 32; \quad 2x^2 = 32;$$

$$x^2 = 16;\ x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

El índice superior debe ser entero positivo, luego $x = -4$ no es solución válida. La única solución es $x = 4$.

Ej.: Un barco tiene banderas de 15 naciones diferentes. Si nada más tiene espacio para desplegar 5 a la vez. cuántos despliegues distintos podrá hacer.

Obsérvese que los elementos son las banderas y cada despliegue que pueda hacer es un grupo, naturalmente los grupos son distintos por tener banderas diferentes, luego los grupos tienen aptitud para diferenciarse por naturaleza, no así por orden, ya que la colocación distinta de las mismas banderas no produce grupos distintos, luego se trata de combinaciones.

$$C_{15}^5 = \binom{15}{5} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3.003 \text{ despliegues}$$

Ej.: Hallar la cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo de n lados.

Si un polígono tiene n lados, también posee n vértices. Cada dos vértices nos definen una diagonal, luego los vértices que tengo son los elementos con los que cuento y cada diagonal es un grupo definido por dos elementos o vértices.

Una diagonal es distinta cuando está formada por dos vértices diferentes, luego los grupos o diagonales se diferencian por el criterio de naturaleza y no por el de orden, ya que la inversión de dos vértices iguales nos reproduce la misma diagonal, luego se trata de combinaciones (C_n^2).

Ahora bien, habrá que tener en cuenta que en lo dicho existe la posibilidad de que al unir dos vértices no resulte una diagonal, sino un lado del polígono, luego habrá que descontar la posibilidad de obtener lados al unir dos vértices (n).

$$D = C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2} \quad \text{diagonales}$$

Con lo que obtenemos la fórmula que expresa el número de diagonales de cualquier polígono convexo de n lados o vértices.

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ej.: En una finca de monte, hay dispersas varias casetas de guardas, cada una de las cuales está unida a las restantes por un camino, calcular el número de casetas que hay, sabiendo que el número de caminos es de 36.

Las casetas son los elementos y los caminos los grupos, ya que cada camino estará definido por dos casetas. Un camino es diferente cuando está formado por dos casetas diferentes (naturaleza), siendo indiferente la ordenación de las casetas para definir un camino, luego son combinaciones. Si hay x casetas, plantearemos:

$$C_x^2 = 36; \frac{x(x-1)}{2 \cdot 1} = 36; x(x-1) = 72$$

$$x^2 - x = 72; x^2 - x - 72 = 0; x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases}$$

existen 9 casetas.

Ej.: La tripulación de un ingenio espacial se compone de un capitán y tres maquinistas. Si disponemos de 4 capitanes y 12 maquinistas, cuántas tripulaciones distintas podemos utilizar. Vamos a ver inicialmente cuántas tripulaciones de maquinistas podemos formar; es obvio que se trata de combinaciones ya que los grupos de maquinistas nada más que se pueden diferenciar por naturleza (C_{12}^3), cada una de las tripulaciones de maquinistas podía ir con cada uno de los cuatro capitanes, luego el total de tripulaciones es:

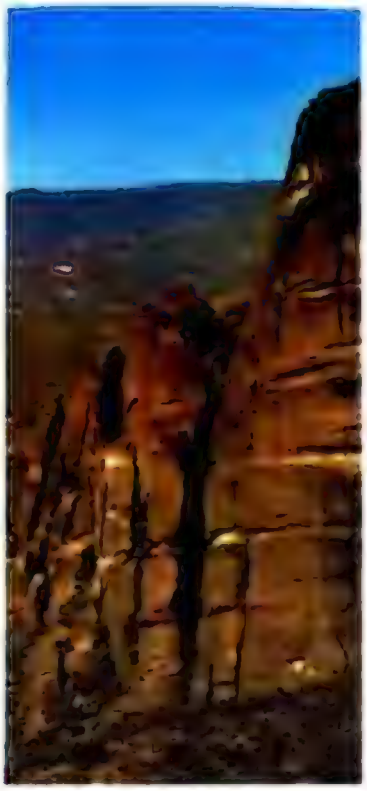
$$4\ C_{12}^3 = 4 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 880 \text{ tripulaciones}$$

Ej.: Cuántos subconjuntos de dos elementos se pueden obtener con los elementos del conjunto A = {a, b, c, d, e}.

Téngase en cuenta que en los conjuntos los elementos repetidos y el orden en que éstos se manifiesten no implica

El sueño es una actividad misteriosa que ocupa un tercio de la vida humana, es cierto que con el transcurso de los años tendemos a dormir cada vez menos. Los recién nacidos no se despiertan más que para comer, al pasar los años esta necesidad se va reduciendo, siendo lo normal dieciseis horas de actividad o de vigilia y ocho de sueño, en la tercera edad la necesidad de dormir disminuye más todavía, reduciéndose a veces a sólo cinco o seis horas. Si dormimos cada vez menos es a causa del cerebro; cuando todo el cuerpo duerme aquél sigue actuando, así puede afirmarse que cerebro y sueño son antagonistas, en esta afirmación nos referimos a la parte más noble la que los fisiólogos llaman «corteza» que es donde residen las actividades superiores, individuos sanos con mucha actividad cerebral duermen poco.

El sueño es un régimen de funcionamiento de máxima economía, durante él, el organismo disminuye el número de pulsaciones, disminuye la temperatura e incluso es más lento el ritmo de la respiración



En algunas zonas de nuestro planeta existen antiguas leyendas de sonidos sobrenaturales producidos por la naturaleza, y que los habitantes del lugar relacionan siempre con algún suceso más o menos histórico.

La música de la montaña que canta, próxima a Turingia, que brama poderosamente o emite un suave y melodioso canto ha sido estudiada por físicos y geólogos. Esta montaña de 650 m. tiene su base compuesta de arcilla impermeable. Las lluvias abundantes practican en su interior huecos y galerías por las que circula, dependiendo de la cantidad de agua y de su fuerza estos efectos acústicos.

En el desierto de Tebas, Humboldt encontró la explicación a los sonidos que emiten los milenarios colosos de Memnón. Allí, al salir el sol, se escucha una especie de música suave que sale de sus piedras. La realidad es que el fuerte sol calienta el aire que por la noche se enfrió y al escapar por las hendiduras del monumento emite sonidos semejantes a los producidos a través de las boquillas de los instrumentos musicales.

distinción. Luego la naturaleza es el criterio que permite distinguir a los subconjuntos, es decir, se trata de combinaciones.

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ subconjuntos.}$$

Ej.: De cuántas formas distintas puede constituirse una sociedad formada por 5 españoles y 4 ingleses, suponiendo que existen 20 candidatos españoles y 12 ingleses.

Inicialmente trataremos de forma separada los grupos de candidatos españoles e ingleses posibles.

Tanto los grupos de candidatos españoles como ingleses se diferenciarán únicamente por el criterio de naturaleza, es decir, se trata de combinaciones. De lo que deducimos que puede haber C_{20}^5 grupos de españoles y C_{12}^4 grupos de ingleses. Ahora bien, como cada grupo de candidatos españoles puede conjugarse con todos los grupos de candidatos ingleses y viceversa, la totalidad de grupos resultantes es:

$$C_{20}^5 \cdot C_{12}^4 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 15.504 \cdot 495 = 7.674.480 \text{ formas.}$$

14.—COMBINACIONES CON REPETICION

Anteriormente habíamos supuesto que en los grupos de combinaciones no se podía repetir ningún elemento, es decir, estábamos tratando las llamadas combinaciones sin repetición u ordinarias.

Si suponemos ahora que un elemento cualquiera se puede incluir todas las veces que queramos en los grupos de combinaciones, obtendremos una cantidad de grupos superior a la que reproducían las combinaciones sin repetición.

Por supuesto, los grupos de combinaciones con repetición, participan de las mismas características que los de combinaciones sin repetición, es decir, siguen conservando únicamente el criterio de **naturaleza** para distinguir a los grupos.

Simbolizaremos las combinaciones con repetición por:

$$C'm, n \text{ ó } RC_m^n.$$

Su cálculo se efectúa mediante la expresión:

$$RC_m^n = \binom{m + n - 1}{n}$$

$$\text{Ej.: } RC_6^2 = \binom{6 + 2 - 1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

$$RC_x^3 = \binom{x+3-1}{3} = \binom{x+2}{3} = \frac{(x + 2)(x+1)x}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(x + 2)(x + 1)x}{6}$$

15.—FORMACION DE LAS COMBINACIONES CON REPETICION

Se forman con las mismas características que las combinaciones sin repetición, sólo que ahora tenemos que formar grupos que incluyan la posibilidad de repetir elementos.

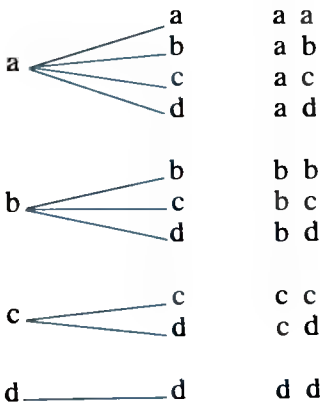
Ej.: Formar los grupos de combinaciones binarias con repetición con los elementos a b c d.

Formación por procedimiento ordinario.

a b	b c	c d	d d
a c	b d	c c	
a d	b b		
a a			

$$RC_4^2 = \binom{4 + 2 - 1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ grupos}$$

Formación por diagrama en árbol.



Ej.: En un sorteo de un Instituto los premios son lotes de 15 monedas. Con monedas de 5, 25 y 50 ptas., cuántos premios distintos pueden dar.

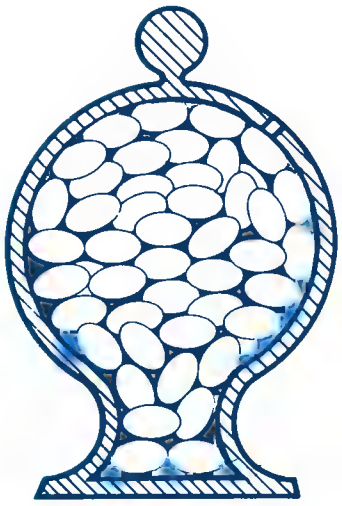
Es evidente que los grupos son cada uno de los lotes de 15 monedas y los elementos las monedas de 5, 25 y 50.

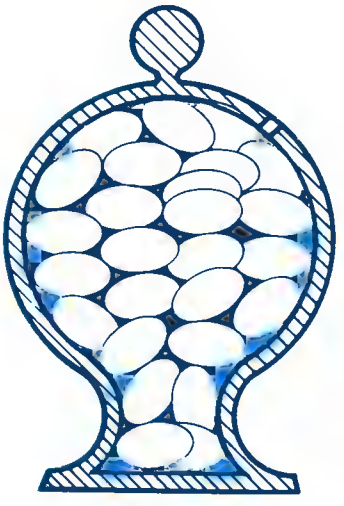
Estos grupos se diferencian únicamente por el criterio de naturaleza, ya que es indiferente la ordenación que tengan las monedas en cada lote o grupo, luego se trata de combinaciones y además con repetición, ya que existen monedas que tengan que repetirse en cada lote.

$$RC_3^{15} = \binom{3 + 15 - 1}{15} = \binom{17}{15} = \binom{17}{2} = \frac{17 \cdot 16}{2 \cdot 1} = 136 \text{ premios.}$$

NOTA.—Obsérvese que hemos transformado $\binom{17}{15} = \binom{17}{2}$ aplicando una propiedad de los números combinatorios que a continuación se exponen.

Ej.: Hallar cuántos resultados se pueden obtener al lanzar al aire tres dados iguales.





Una hucha está llena de monedas de oro, de un gramo y otra hucha exactamente igual a ésta llena de monedas de dos gramos. Se pregunta ¿Cuál de las dos valdrá más?

La solución en el próximo número. Pág. 416

Tenemos una sucesión de números y queremos sacar el anterior y el posterior a esos números. ¿Cuáles serán?

...11, 13, 17, 19, 23, 29...

Solución en Pág. 416

En la antigua Roma los buenos cocineros estaban muy cotizados, un esclavo cocinero valía cien mil sextercios, es decir, tanto como una finca rústica. Los manjares raros y costosos venían de todas las partes del imperio, los pescados delicados y de gran tamaño, para que llegaran a su destino en buenas condiciones eran trasportados dentro de vasijas llenas de miel.

El ansia de placeres insólitos originó la aparición de los manjares más inauditos. Se sabe de un festín en que se sirvieron 5.000 lenguas de pájaros cantores, en otro 500 evestruces proporcionaron sus sesos para hacer un solo guiso.

También se cita a Lúculo, gran tragón de esa época y al emperador Vitelio que dio un banquete en honor de su hermano, en el que se sacrificaron siete mil aves y dos mil peces, de postre formaban golosinas a base de harina, pastelería, fritos, dulces con aceite de oliva y frutas de los países más exóticos.

La comida duraba muchas horas y se realizaba con los comensales tumbados en los llamados «triclinios». La comida siempre terminaba bebiendo vino mezclado con agua, siguiendo la tradición iniciada por los griegos.

Téngase en cuenta que cada dado posee seis resultados (1, 2, 3, 4, 5, 6), que serán los elementos que formarán parte de los grupos. Cada grupo constará de tres elementos que corresponden a cada cara de los tres dados.

Los grupos únicamente se distinguirán por el criterio de naturaleza, ya que el orden de obtención de los resultados de cada dado es indiferente, luego se trata de combinaciones y además con repetición, ya que es posible obtener similares resultados en más de un dado.

$$RC_6^3 = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ resultados}$$

16.—PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS

Son propiedades que se utilizan en el cálculo de números combinatorios con el objetivo de facilitar sus soluciones.

A) Primera propiedad: Dos números combinatorios de igual numerador y órdenes complementarios son iguales.

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\text{Ej.: } \binom{25}{21} = \binom{25}{25-21} = \binom{25}{4} = \binom{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12.650$$

B) Segunda propiedad:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

$$\text{Ej.: } \binom{5}{3} = \binom{5-1}{3-1} + \binom{5-1}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

C) Triángulo de Tartaglia. Es un aparato de cálculo de números combinatorios que surge como respuesta a la segunda propiedad de los números combinatorios, y que posteriormente veremos su aplicación para calcular los coeficientes de desarrollo binómicos.

Su formación consiste en diferentes filas, cada una de ellas para distintos valores del índice superior m, que forman una

geometría de tipo triangular.

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

.....

.....

m = 1	1 1
m = 2	1 2 1
m = 3	1 3 3 1
m = 4	1 4 6 4 1
m = 5	1 5 10 10 5 1
m = 6	1 6 15 20 15 6 1

.....

.....

Obsérvese cómo la formación sigue la ley, de que cada elemento es la suma de los dos que tiene encima. Además dicha formación tiene la propiedad de que existe una simetría total respecto del eje vertical del triángulo.

D) Triángulo de Pascal. Es un triángulo aritmético más general que el de Tartaglia, formado por la misma ley, pero con la diferencia de que su lado izquierdo está formado por números iguales pero distintos de los de su lado derecho. Obsérvese:

		a b		
		a + b		
	a		b	
a		2a + b	a + 2b	b
a	3a + b		3a + 3b	a + 3b b

Si en el triángulo de Pascal hacemos a = b = 1 obtenemos el triángulo de Tartaglia.

17.—POTENCIA DE UN BINOMIO FORMULA DE NEWTON

Elevar un binomio a una potencia cualquiera es un cálculo que se puede realizar por múltiples procedimientos, por ejemplo, aplicando un producto de polinomios; sin embargo, la fórmula de Newton también resuelve el problema, y considerando la importancia de ella en el desarrollo de las Matemáticas, es interesante tener un conocimiento perfecto de la fórmula y de sus consecuencias, dadas sus diversas aplicaciones.

— Imaginemos un binomio elevado a una potencia cualquiera $(a + b)^m$, su desarrollo según la fórmula de Newton se compone de una cierta cantidad de sumandos, en donde cada uno de ellos va procediendo de un número combinatorio.

En el año 1940 la ciudad de París fue ocupada por el ejército alemán, al llegar al instituto Pasteur, el oficial que mandaba el pelotón ordenó al portero de dicho instituto que abriera la cripta donde reposaban los restos de Louis Pasteur. El portero, temiendo una violación en la tumba y llevado por su gran admiración hacia el sabio, se negó, resistiéndose y demostrando claramente que protegería aún con su vida los restos del gran bacteriólogo.

Este hombre actuó así movido por la gratitud que sentía, ya que fue la primera persona inoculada contra la rabia. La vacuna antirrábica lograda cincuenta años antes había salvado su vida.

Este primer uso de la vacuna fue un hito en la historia de la medicina y consagró definitivamente a Pasteur frente a los científicos que se negaban a aceptar sus teorías sobre los agentes de las enfermedades contagiosas y sobre los propagadores de la infección.

Descubrió las bacterias anaerobias y gracias a sus experimentos demostró que la generación espontánea es una quimera, de tal forma que la aparición súbita de seres vivos, aun de los más simples, a partir de materiales inertes es imposible. Se demostró que los casos descritos como de generación expontánea eran interpretaciones superficiales de los datos.

Hay algunas plantas que muestran hermoso colorido y despiden su perfume solamente para atraer a los insectos, confiarlos, atraparlos y matarlos. Esto tiene sus motivos; las plantas comedoras de insectos están enraizadas en suelos pobres de hidrógeno o de ciertas sales minerales.

Un ejemplo es la Drosera, que se cría en terreno cenagoso, que no pueden suministrarle las sales necesarias para su consumo de albúmina, entonces sus hojas que tienen apéndices grandulosos, capaces de segregar un líquido dulce y transparente, atraen a los insectos. En el momento en que éste se posa, los pelos lo inmovilizan, segregando después un líquido ácido y que digiere las partes blandas del animal.

En los prados cenagosos existe otro vegetal devorador de insectos, el «Fettkrant». Tiene flores de color violeta con grandes hojas posadas en el suelo, impregnadas de un jugo viscoso. Cuando un insecto pequeño toca este jugo la hoja se abarquilla, empujando su presa hacia el centro donde es muerto y descompuesto por el jugo digestivo que estas glándulas despiden.

— Estos números combinatorios son los que decididamente proporcionan todas las características de fondo y de forma de cada término del desarrollo.

— La formación de estos números combinatorios sigue el siguiente criterio: Todos los números combinatorios llevan como índice superior la potencia del binomio, y como índice inferior comienzan por cero desde el primer término, produciéndose un aumento de una unidad con respecto al anterior en los términos sucesivos, hasta que el índice inferior se hace igual al superior, en cuyo momento podemos dar por finalizada la formación del desarrollo.

— Para facilitar la comprensión del desarrollo en el binomio $(a + b)^m$, vamos a llamar a = primero y b = segundo (obsérvese después que lo más importante es el número combinatorio de cada término, pero debemos de obtener todo el término completo). Pues bien, teniendo el número combinatorio de cada término, podemos decir: el primero elevado a la diferencia (índice superior menos índice inferior) por el segundo elevado al índice inferior.

— Obsérvese un desarrollo teórico de $(a + b)^m$.

$$(a + b)^m = \binom{m}{0} a^m b^0 + \binom{m}{1} a^{m-1} b^1 + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 +$$

$$+ \binom{m}{3} a^{m-3} b^3 + \cdots + \binom{m}{m-1} a^1 b^{m-1} + \binom{m}{m} a^0 b^m.$$

Ej.: Desarrollar por Newton $(a + b)^4$:

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 +$$

$$+ \binom{4}{4} a^0 b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

NOTA.—Para que nos demos cuenta de todas las posibilidades operativas, los número combinatorios, se pueden obtener también mediante la aplicación del triángulo de Tartaglia. Para ello como el exponente del binomio es m = 4, en nuestro caso debemos de llegar en el triángulo de Tartaglia hasta la cuarta fila.

m = 1			1	1	
m = 2		1	2	1	
m = 3	1	3	3	1	
m = 4	1	4	6	4	1

La localización de la restante composición de cada término se hace teniendo en cuenta que la suma de los exponentes del primero y del segundo en cada término debe ser igual a la potencia del binomio.

Así se comienza por el primero elevado a la potencia del binomio y el segundo a cero ($a^4\ b^0$) y los restantes se pueden obtener sustrayendo una unidad al exponente de a^4 y sumando esta unidad al exponente de b^0, y así sucesivamente. Es decir:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ a^4 \cdot b^0 & & a^3b^1 & & a^2b^2 & & a^1b^3 & & a^0b^4 \end{array}$$

$$1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Ej.: Desarrollar por Newton $(a - b)^3$.

Cuando el primero o el segundo vayan afectados de signo menos, este signo lo iremos reflejando en todo el desarrollo, y luego aplicaremos las oportunas operaciones de potenciación para ir detectando el signo definitivo de cada término

$$(a - b)^3 = \binom{3}{0} a^3(-b)^0 + \binom{3}{1} a^2(-b)^1 + \binom{3}{2} a^1(-b)^2 + \\ + \binom{3}{3} a^0(-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

NOTA.—Como se observa, los signos en los términos, en este caso, van alternándose. Sin embargo, es conveniente seguir la técnica expuesta, ya que en aplicaciones prácticas, como los números complejos se produce además, más cambios de signo.

Ej.: Desarrollo por Newton $(x + x^2)^5$

$$(x + x^2)^5 = \binom{5}{0}x^5 (x^2)^0 + \binom{5}{1}x^4 (x^2)^1 + \binom{5}{2}x^3 (x^2)^2 + \binom{5}{3}$$

$$x^2(x^2)^3 + \binom{5}{4}x^1 (x^2)^4 + \binom{5}{5} x^0(x^2)^5 = x^5 + 5x^6 + 10x^7 + 10x^8 + 5x^9 + x^{10}$$

18.—PARTICULARIDADES EN EL BINOMIO DE NEWTON

Del desarrollo de un binomio por Newton, vamos a obtener una serie de conclusiones básicas y cuya manifestación se puede adoptar como reglas fijas para cualquier binomio.

A) Número de términos del desarrollo.

Cualquier desarrollo de Newton posee siempre un número de términos, equivalente a la potencia del binomio más uno (obsérvese los desarrollos anteriores).

Ej.: Cuántos términos tiene el binomio $(x + z)^{20}$ · núm. términos = 20 + 1 = 21 términos.

B) Características de los números combinatorios. Como ya sabemos, cualquier término de un desarrollo va precedido de un número combinatorio, que lleva como índice superior a la potencia del binomio y como índice inferior, una unidad menos del lugar que le corresponde al término en el desarrollo.

Este detalle nos permite obtener cualquier término de un desarrollo de Newton, sin tener que obtener todo el desarrollo completo.

Ej.: Hallar el término que ocupa el lugar 60 en el desarrollo $(x + y)^{62}$. Pues bien, vamos a localizar el número combinatorio correspondiente a este término, que es $\binom{62}{59}$.

Luego el término es:

$$\binom{62}{59} x^3y^{59} = \binom{62}{62 - 59} x^3y^{59} = \binom{62}{3} x^3y^{59} =$$

$$= \frac{62 \cdot 61 \cdot 60}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^3y^{59} = 37.820\ x^3y^{59}$$

Nuestro corazón en una vida normal de 75 a 80 años mueve una cantidad de sangre suficiente para llenar un depósito gigante, ha latido sin parar 3.600 millones de veces, los riñones filtran más de 500 litros de sangre diarios, nuestro cerebro almacena 14.000 millones de células nerviosas, los conductos nerviosos de un cuerpo adulto tienen una longitud calculada en 480.000 Km; mayor que la distancia que nos separa de la Luna, que es de 384.400 Km.

Nuestra piel contiene 100 glándulas sudoríparas por centímetro cuadrado, o sea más de dos millones en todo en cuerpo. La retina de nuestros ojos posee alrededor de 75 millones de puntitos que unidos a unos filamentos nerviosos extremadamente finos comunican al cerebro las imágenes ópticas.

Nuestro oído contiene 25.000 elementos nerviosos, éstos y otros datos al cual más asombroso nos hacen pensar en la perfección que acumula la máquina maravillosa que somos nosotros mismos.

La sierra de Montserrat es un monumento natural de espectacular y caprichosa orografía, con alturas máximas de 1.236 m. Situada en el centro de la región catalana alberga el monasterio benedictino, fundado en el año 1025 por el Abad Oliba, que aloja la famosa imagen de la «Moreneta» intimamente ligada a la espiritualidad de toda Cataluña.

Su nombre Montserrat (monte serrado) es universalmente conocido y se repite en varios lugares del mundo. Ya Colón, en uno de sus viajes a la vista de una isla escarpada y rocosa que encontró en lo que hoy es California, la bautizó con el nombre de Montserrat.

Se dice que la primera iglesia que se alzó en el Nuevo Mundo fué dedicada a la Virgen Catalana.

El paso del tiempo y las reformas posteriores han modificado las primitivas edificaciones. Sólo perdura inalterable y firme el emocionado respeto con que los fieles veneran a la Madre de Dios.

Ej.: La suma de los términos 3.º y 4.º del desarrollo $(x + 2)^4$ es 22. Calcular el valor de x, sabiendo que es un número positivo.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Término 3.º: } \binom{4}{2}x^2 \cdot 2^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}x^2 \cdot 4 = 24x^2 \\ \text{Término 4.º: } \binom{4}{3}x \cdot 2^3 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}x \cdot 8 = 32x\end{array}\right\} 24x^2 + 32x = 22$$

$$24x^2 + 32x - 22 = 0;\ 12x^2 + 16x - 11 = 0;$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 528}}{24} = \frac{-16 \pm \sqrt{784}}{24} = \frac{-16 \pm 28}{24} =$$

$$= \begin{cases} 12/24 = 1/2 \\ -44/24 = -11/6 \end{cases} \qquad x = 1/2.$$

C) Cálculo del término general de un binomio.

En el apartado anterior B) obteníamos un término concreto de un desarrollo. Ahora, de lo que se trata es de obtener un término llamado general, que sea representativo de todos los términos del desarrollo. Su obtención efectivamente posee su campo de aplicación para otro tipo de cuestiones.

Aunque el término sea el general del binomio, el número combinatorio que le procede llevará como índice superior la potencia del binomio, y como índice inferior, una incógnita representativa de todo el conjunto de términos, que la vamos a llamar n.

En un binomio genérico de la forma $(a + b)^m$, el término general es:

$$\binom{m}{n} a^{m-n} b^n$$

Ej.: Hallar el término general del binomio $(x + y)^{30}$.

$$\binom{30}{n} x^{30-n} y^n$$

Ej.: En el desarrollo de $(x^{13} + x)^{16}$, calcular el término en que el exponente de x es 24.

Obsérvese que entre todos los términos del desarrollo, posiblemente exista uno en que el exponente de x sea 24, si así no fuese, el problema no tendría solución. Este es el que tenemos que localizar. Inicialmente vamos a calcular el término general del desarrollo.

$$\binom{16}{n}(x^3)^{16-n}x^n = \binom{16}{n}x^{48-3n}x^n = \binom{16}{n}x^{48-3n+n} =$$

$$= \binom{16}{n}x^{48-2n}.$$

Pues bien, como este término general es representativo de cualquier término del desarrollo, vamos a obligar a que el

exponente de x sea 24.

$$48 - 2n = 24;\ 24 = 2n;\ n = 12$$

Luego, si n=12, el término es el 13.º. Así que sustituyendo en el término general n = 12, obtenemos.

$$\binom{16}{12} x^{24} = \binom{16}{16-12} x^{24} = \binom{16}{4} x^{24} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$x^{24} = 1.820x^{24}.$$

19.—POTENCIA DE UN POLINOMIO. FORMULA DE LEIBNITZ

El problema que se nos plantea es hallar el desarrollo de la potencia de un polinomio cualquiera de n términos.

$$(a + b + c + \ldots\overset{n}{\ldots})^m$$

Cualquier término del desarrollo de la potencia de un polinomio es de la forma:

$$a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots$$

siendo nulos los exponentes de aquellas letras que no entren a formar parte del producto de cada término en cuestión.

Lo mismo que ocurría en un desarrollo de Newton ocurre en un desarrollo de Leibnitz, en cuanto que la suma de los exponentes de cada término deberá de ser igual a la potencia del polinomio.

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = m$$

Cualquier desarrollo de la potencia de un polinomio por Leibnitz, plantea dos cuestiones de cálculo:

A) **Cálculo de los términos.** Consiste en formar todos los términos posibles de la forma: $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots$ que cumplan la condición $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = m$. Esto equivale a obtener todas las descomposiciones posibles del número m en n sumandos.

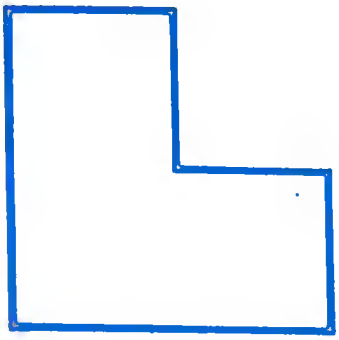
Ej.: Imaginemos la potencia $(a + b + c + d)^5$.

Sus términos serán de la forma $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\lambda}$ con la condición $\alpha + \beta + \gamma + \lambda = 5$. Es decir:

α	β	γ	λ
5	0	0	0
4	1	0	0
3	2	0	0
3	1	1	0
2	2	1	0
2	1	1	1

Obsérvese que en cada una de estas descomposiciones podemos permutar los exponentes, obteniendo varias descomposiciones y consecuentemente varios términos.

El cambio que supuso en la navegación el empleo de las velas múltiples y la posibilidad de navegar con cualquier viento, abrió los mares a la audacia del hombre iniciando realmente los intercambios comerciales y los movimientos migratorios, los dos grandes grupos de naves fueron por una parte los barcos anchos y rechonchos, utilizados por los primitivos navegantes mediterráneos de gran capacidad y poca velocidad y las estilizadas naves de los vikingos que todo lo fiaban a su rapidez a base del impulso de sus numerosísimos remos, este tipo de barcos no fueron creación suya, los fenicios ya utilizaron 200 años antes de C. unas galeras llamadas birretes, con unos 40 remeros, y un mástil en el centro de su eslora, con una pasarela central para los guerreros, no resultaban muy marineros pero eran muy manejables en aguas poco profundas y muy rápidos en mar libre.



Anteriormente pusimos el problema de un padre que al morir dejó a 5 hijos un terreno cuadrado de 1.000 m de lado..., etc.

Pues bien, uno de esos hijos se quedó con la canción y al cabo de los años cuando ya era anciano, se lo contaba a sus nietos como una anécdota. Uno de los nietos le preguntó al abuelo que iba a *tramar* con la herencia a sus hijos ya que éste tenía 4 hijos. Pensó el abuelo en esta circunstancia y él precisamente tenía un terreno igual al de su padre, o sea cuadrado (aquí no importan las medidas). Entonces ideó donar una cuarta parte del terreno a una fundación benéfica y las otras 3/4 partes del terreno a sus hijos, que lo dividieran en 4 partes pero *exactamente iguales*. Sabían el cuento o la anécdota y vieron que el abuelo ya chocheaba. Cuál no sería su sorpresa cuando vieron el terreno que les había dejado y su configuración, era así:

Hay qué respetar al pie de la letra las cláusulas del testamento. Hay que dividirlo en *cuatro partes* exactamente iguales. ¿Cómo hacerlo?

La solución en Pág. 416.

(obsérvese que $5 + 0 + 0 + 0 = 0 + 5 + 0 + 0 = \ldots$)

Para ello es indiferente conservar fijas las letras a, b, c, d y permutar sus respectivos exponentes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ o al revés. Así la descomposición $4 + 1 + 0 + 0$ produce los términos

a^4b	a^4c	a^4d
b^4a	b^4c	b^4d
c^4a	c^4b	c^4d
d^4a	d^4b	d^4c

que designaremos abreviadamente por Σa^4b.

B) **Cálculo de los coeficientes.** Será el número de veces que un término cualquiera aparezca repetido en el desarrollo.

Ej.: Imaginemos la potencia $(a + b + c + d)^5$.

Es obvio que al desarrollar surgirán términos de la forma: aabbb, baabb, ...

Es decir, términos iguales pero con distinta colocación de sus elementos. Evidentemente el término definitivo se reducirá al número de veces que aparezca uno de éstos por la parte literal del término en cuestión.

El coeficiente del término será, por tanto, la cantidad de veces que exista el término en cuestión, que no es otra cosa que la cantidad de permutaciones con repetición, ya que los grupos son los términos y sus elementos los sumandos componentes del polinomio. Estos grupos únicamente son distintos por el criterio de orden (obsérvese que en cada término entran todos los sumandos. Los que no estén es porque sus exponentes son cero. Téngase en cuenta que la suma de sus exponentes debe ser 5), luego se trata de permutaciones, y además con repetición, ya que pueden existir elementos repetidos en cada término.

$$RP_m^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{m\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\ldots}$$

C) **Conjugación de términos y coeficientes.** Teniendo clara la idea de la formación de los términos y de sus coeficientes, podemos plantear la fórmula de Leibnitz de forma abreviada:

$$(a + b + c + \overset{n}{\ldots\ldots})^m = \sum \frac{m\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!}\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$$

Ej.: Desarrollar $(a + b + c)^4$.

$$(a + b + c)^4 = \frac{4\,!}{4\,!\,0\,!\,0\,!}\,\Sigma a^4 + \frac{4\,!}{3\,!\,1\,!\,0\,!}\,\Sigma a^3b +$$

$$+ \frac{4\,!}{2\,!\,2\,!\,0\,!}\,\Sigma a^2b^2 + \frac{4\,!}{2\,!\,1\,!\,1\,!}\,\Sigma a^2bc =$$

$$= (a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b) + 6$$
$$(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 12\,(a^2bc + b^2ac + c^2ab).$$

TEMA 20

SISTEMA METRICO DECIMAL

INDICE

1.–INTRODUCCION.
2.–UNIDADES DE LONGITUD.
3.–UNIDADES DE SUPERFICIE.
4.–UNIDADES AGRARIAS.
5.–UNIDADES DE VOLUMEN.
6.–UNIDADES DE CAPACIDAD.
7.–UNIDADES DE PESO.
8.–CUADRO RESUMEN DEL SISTEMA METRICO DECIMAL.
9.–RELACION ENTRE EL SISTEMA METRICO DECIMAL Y EL SISTEMA INGLES DE UNIDADES.
A.–Unidades de longitud.
B.–Unidades de superficie.
C.–Unidades de volumen.
D.–Unidades de capacidad.
E.–Unidades de peso.
F.–Otras unidades.

TEMA 20

FABULA CHINA

Un hombre perdió su cuchillo e inmediatamente sospechó de su vecino. Observó la forma que tenía de mirar (como de un ladrón), la forma de andar (como de un ladrón), en fin, la forma de comportarse (también como de un ladrón), todo lo cual le denunciabe como culpable.

Después de cierto tiempo encontró el cuchillo en el fondo de un cajón de su casa.

Cuando vio a su vecino, tenía éste otra forma de mirar. otre forma de andar y otra forma de comportarse, muy diferentes a las de un ladrón.

MORALEJA: Cuando hagamos un juiclo, no obremos a la ligera, que no nos engañen las apariencias, y así seremos más justos.

LIE - DSI

SISTEMA METRICO DECIMAL

1.–INTRODUCCION

Todos los cuerpos son aptos para medirse, desde varios puntos de vista: longitud, superficie o volumen.

Para medir cualquier cantidad se utiliza otra de su misma especie llamada **unidad.**

En el siglo XVIII, se acordó, para unificar criterios adoptar una unidad de medida o unidades de medida comunes para todo el mundo, siendo la más importante: **el metro.**

Esta unidad fundamental **metro** y todas las demás unidades secundarias cuya formación siguen la ley decimal, dan origen al sistema Métrico Decimal, vigente en casi todos los paises del mundo.

Existe no obstante otro sistema de unidades, llamado **inglés** que se practica oficialmente en algunas zonas del mundo, basado fundamentalmente en el pie-libra-segundo.

Además, independientemente del sistema métrico decimal o del sistema inglés, la gran mayoría de los países siguen empleando para sus transacciones comerciales internas antiguas medidas que no son de menospreciar por su constante utilización y profundo arraigo.

2.–UNIDADES DE LONGITUD

La unidad principal es el **metro (m).**

Múltiplos	MIRIAMETRO (Mm)	$= 10.000$ m	$= 10^4$ m
	KILOMETRO (Km)	$= 1.000$ m	$= 10^3$ m
	HECTOMETRO (Hm)	$= 100$ m	$= 10^2$ m
	DECAMETRO (Dm)	$= 10$ m	$= 10^1$ m
	METRO (m)		
Submúltiplos	decímetro (dm)	$= 0{,}1$ m	$= 10^{-1}$ m
	centímetro (cm)	$= 0{,}01$ m	$= 10^{-2}$ m
	milímetro (mm)	$= 0{,}001$ m	$= 10^{-3}$ m
	micra (μ)	$= 0{,}001$ mm	$= 10^{-3}$ mm

Obsérvese cómo todas las unidades de longitud aumentan o disminuyen de 10 en 10.

Ej.: Poner en metros: 3 Mm, 2 Hm, 5 Dm, 7 dm, 1 cm:

3 Mm	$= 3 \cdot 10.000$	$=$	30.000	m
2 Hm	$= 2 \cdot 100$	$=$	200	m
5 Dm	$= 5 \cdot 10$	$=$	50	m
7 dm	$= 7 \cdot 0{,}1$	$=$	0,7	m
1 cm	$= 1 \cdot 0{,}01$	$=$	0,01	m
			30.250,71	m

Ej.: Poner en cm: 2 Km, 5 Dm, 3 m, 5 dm, 7 cm:

2 Km	$= 2 \cdot 100.000$	$=$	200.000 cm	(5 lugares = 5 ceros)
5 Dm	$= 5 \cdot 1.000$	$=$	5.000 cm	(3 lugares = 3 ceros)
3 m	$= 3 \cdot 100$	$=$	300 cm	(2 lugares = 2 ceros)
5 dm	$= 5 \cdot 10$	$=$	50 cm	(1 lugar = 1 cero)
7 cm	$= 7$	$=$	7 cm	(ningún lugar)
			205.357 cm	

Ej.: Una persona compró 125 m de tela a 175 ptas. el metro. Sin embargo, el metro que usó el vendedor estaba falto de 11 milímetros y 1/2.

¿Qué pérdida de tela y dinero sufrió el comprador?

11,5 mm = 0,0115 m

Pérdida de tela = $125 \cdot 0{,}0115 = 1{,}4375$ m

Pérdida de dinero = $1{,}4375 \cdot 175 = 251{,}5625$ ptas.

TURISTAS

Unos estudiantes franceses estuvieron en España en viaje de estudios. Al volver a Francia, el autocar tiene un accidente y fallecen varios de los estudiantes. ¿Dónde se enterrará a los supervivientes? Aquí tapa la respuesta. Piensa... Si vas a enterrar a los **supervivientes** o **sobrevivientes**, estás arreglado.

Una vez conseguí lo que parece imposible, dijo un amigo a otro.

El interruptor de mi habitación está a cuatro metros de mi cama. Pues bien, apagué la luz de mi habitación y antes de que ésta quedara a oscuras conseguí meterme en la cama. ¿Cómo lo hizo?

La respuesta es bien sencilla. ¿Dónde he dicho que era de noche? ¿Cómo iba a quedar la habitación a oscuras si era DE DIA?

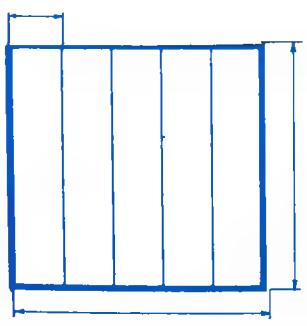
NOTA: Analizando bien las situaciones, todas las soluciones son fáciles.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL PROFESOR "COCINILLA" DE LA PAGINA 372.

—Bien —dijo el profesor—. Tomo dos filetes y los frío por una cara (los dos), ya son diez minutos. Saco uno de los filetes de la sartén, le doy la vuelta al que quedaba en la sartén y al mismo tiempo meto el tercer filete que está totalmente crudo y ya tenemos que en otros diez minutos se terminará de freír un filete y la cara primera del otro; ya que son, en total, veinte minutos. Sacamos el filete que está frito totalmente; en su puesto ponemos el que se sacó de la sartén y que está frito por una parte y lo ponemos a freír por la otra cara; al que nos quedaba en la sartén y frito por una cara le damos la vuelta. Otros diez minutos más, y ya tenemos fritos los tres filetes y en sólo TREINTA MINUTOS. Hemos ganado 10 minutos. ¿No?

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA HERENCIA DE TERRENO.

Tan sencillo es dividir un terreno de forma cuadrada en cuatro partes iguales, como en cinco, como en cincuenta y siete. Ver el dibujo.



3.—UNIDADES DE SUPERFICIE

La unidad principal es el **metro cuadrado (m^2).**

Múltiplos

- MIRIAMETRO CUADRADO (Mm^2) = 100.000.000 m^2 = 10^8 m^2
- KILOMETRO CUADRADO (Km^2) = 1.000.000 m^2 = 10^6 m^2
- HECTOMETRO CUADRADO (Hm^2) = 10.000 m^2 = 10^4 m^2
- DECAMETRO CUADRADO (Dm^2) = 100 m^2 = 10^2 m^2

METRO CUADRADO (m^2)

Submúltiplos

- decímetro cuadrado (dm^2) = 0,01 m^2 = 10^{-2} m^2
- centímetro cuadrado (cm^2) = 0,0001 m^2 = 10^{-4} m^2
- milímetro cuadrado (mm^2) = 0,000001 m^2 = 10^{-6} m^2

Observen cómo las unidades de superficie aumentan o disminuyen de 100 en 100.

Ej.: Poner en dm^2: 2 Km^2, 3 Dm^2, 4 m^2, 5 dm^2:

$2\ Km^2 = 2 \cdot 100.000.000 = 200.000.000\ dm^2$ (4 lugares = 8 ceros)
$3\ Dm^2 = 3 \cdot 10.000 = 30.000\ dm^2$ (2 lugares = 4 ceros)
$4\ m^2 = 4 \cdot 100 = 400\ dm^2$ (1 lugar = 2 ceros)
$5\ dm^2 = 5 = 5\ dm^2$ (ningún lugar)

$200.030.405\ dm^2$

4.—UNIDADES AGRARIAS

Son unidades de superficie que se utilizan para medir la extensión de campos, bosques, etc.

La unidad principal es el **área (a)** que equivale al Dm^2.

Múltiplo

- HECTAREA (Ha) = 100 áreas (coinciden con el Hm^2) = 10^2 áreas

AREA (a) (coinciden con el Dm^2)

Submúltiplo

- CENTIAREA (ca) = 0,01 áreas (coinciden con el m^2) = 10^{-2} áreas

Las unidades agrarias aumentan o disminuyen como las de superficie, de 100 en 100.

Ej.: ¿Cuántas áreas son 3 Ha, 2 ca?

$3\ Ha = 3 \cdot 100 = 300$ áreas
$2\ ca = 2 \cdot 0,01 = 0,02$ áreas

$300,02$ áreas

5.–UNIDADES DE VOLUMEN

La unidad principal es el **metro cúbico (m^3).**

Múltiplos	Miriámetro cúbico (Mm^3)	$= 1.000.000.000.000\ m^3$	$= 10^{12}\ m^3$
	Kilómetro cúbico (Km^3)	$= 1.000.000.000\ m^3$	$= 10^9\ m^3$
	Hectómetro cúbico (Hm^3)	$= 1.000.000\ m^3$	$= 10^6\ m^3$
	Decámetro cúbico (Dm^3)	$= 1.000\ m^3$	$= 10^3\ m$
	METRO CUBICO (m^3)		
Submúltiplos	decímetro cúbico (dm^3)	$= 0{,}001\ m^3$	$= 10^{-3}\ m^3$
	centímetro cúbico (cm^3)	$= 0{,}000001\ m^3$	$= 10^{-6}\ m^3$
	milímetro cúbico (mm^3)	$= 0{,}000000001\ m^3$	$= 10^{-9}\ m^3$

Obsérvese que las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1.000 en 1.000.

Ej.: Pasar a cm^3 la cantidad: 3 Dm^3, 2 m^3, 5 dm^3.

$3\ Dm^3 = 3 \cdot 1.000.000.000 = 3.000.000.000\ cm^3$ (3 lugares = 9 ceros)
$2\ m^3 = 2 \cdot 1.000.000 = 2.000.000\ cm^3$ (2 lugares = 6 ceros)
$5\ dm^3 = 5 \cdot 1.000 = 5.000\ cm^3$ (1 lugar = 3 ceros)
$3.002.005.000\ cm^3$

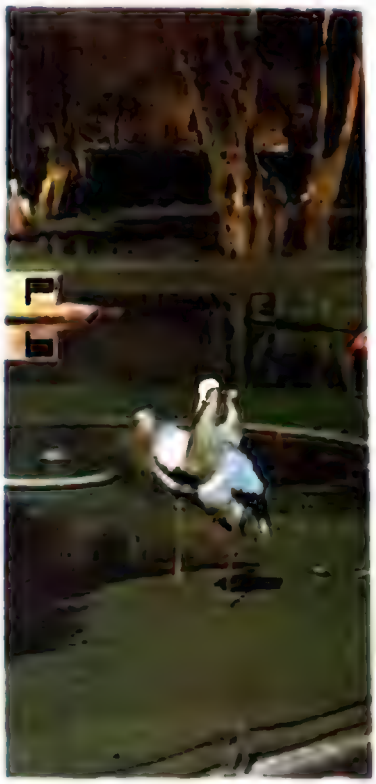
Ej.: Averiguar los cm^3 que contiene un estanque cuya capacidad es de 75 m^3 y 176 dm^3.

Tenemos que pasar la capacidad del estanque a cm^3, es decir:

$75\ m^3 = 3 \cdot 1.000.000 = 3.000.000\ cm^3$ (2 lugares = 6 ceros)
$176\ dm^3 = 176 \cdot 1.000 = 176.000\ cm^3$ (1 lugar = 3 ceros)
$3.176.000\ cm^3$

Ej.: Expresar en forma potencial en Dm^3 la cantidad de 35 cm^3. Pasamos los cm^3 a Dm^3.

$$35\ cm^3 = \frac{35}{1.000.000.000} = \frac{35}{10^9} = 35 \cdot 10^{-9}\ Dm^3$$



La simpática cigüeña, ave viajera por excelencia, hace recorridos enormes en su deseo de buscar el clima más propicio para su vida y desarrollo. En verano viene a Europa y en invierno se vuelve a las zonas cálidas de Africa.

Estos movimientos migratorios están perfectamente estudiados por los ornitólogos que fijan en una de sus patas un anillo de aluminio numerado. Al recuperar estas aves anilladas sorprende la extraordinaria capacidad de orientación que tienen. Se sabe que la cigüeña viaja siempre de día a una altura aproximada de 150 m. Se orienta, en parte, por un sentido heredado, en otra por el Sol, y cuando el cielo está cubierto, por una cierta memoria de los ríos, montes y costas.

La que realmente vuela distancias enormes es la gaviota ártica. Ave de tamaño algo mayor que una paloma, que viaja del Artico hasta el Antártico y puede recorrer hasta 30.000 Km al año.

El primer violín construido por Stradivarius lleva fecha de 1666; pero tardó todavía un año más en comenzar a trabajar por su cuenta. Durante treinta años fabricó instrumentos de cuerda, principalmente violines.

Entre 1700 y 1710 se sitúa el período de sus obras maestras. Perfeccionó sus cálculos y sus métodos de trabajo construyendo varios violines que son considerados excepcionales, pudiendo citarse entre ellos el de Viotti y el llamado de Pucelle. Siempre en vías de superación, produjo el famoso violín de Parke y el de Boissier, que perteneció a Sarasate. También fabricó el Dolphin, el Gillot y el Aland, este último considerado el más perfecto de todos.

La obra de este maestro, maravillosa muestra de artesanía, se encuentra en célebres museos, y en poder de grandes artistas.

Se estima que fabricó unos mil instrumentos de cuerda. Murió en Cremona, Italia, en diciembre de 1737.

6.—UNIDADES DE CAPACIDAD

La unidad principal es el **litro (l)** que equivale al dm^3.

Múltiplos	Kilolitro (Kl)	$= 1.000$ litros $= 10^3$ litros
	Hectolitro (Hl)	$= 100$ litros $= 10^2$ litros
	Decalitro (Dl)	$= 10$ litros $= 10^1$ litros
	LITRO (1)	
Submúltiplos	decilitro (dl)	$= 0{,}1$ litros $= 10^{-1}$ litros
	centilitro (cl)	$= 0{,}01$ litros $= 10^{-2}$ litros
	mililitro (ml)	$= 0{,}001$ litros $= 10^{-3}$ litros

Obsérvese que las unidades de capacidad, aumentan o disminuyen de 10 en 10.

Ej.: Cuántos Dl son 3 litros, 2 dl, 4 cl, 5 ml.

$$\begin{aligned} 3 \text{ litros} &= 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3 \text{ Dl} \quad (1 \text{ lugar} = 1 \text{ cero}) \\ 2 \text{ dl} &= 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02 \text{ Dl} \quad (2 \text{ lugares} = 2 \text{ ceros}) \\ 4 \text{ cl} &= 4 \cdot 0{,}001 = 0{,}004 \text{ Dl} \quad (3 \text{ lugares} = 3 \text{ ceros}) \\ 5 \text{ ml} &= 5 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0005 \text{ Dl} \quad (4 \text{ lugares} = 4 \text{ ceros}) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}3245 \text{ Dl} \end{aligned}$$

Ej.: El número 1.936,45 litros se puede descomponer de la siguiente forma:

1.936,45 litros = 1 Kl, 9 Hl, 3 Dl, 6 litros, 4 dl, 5 cl.

7.—UNIDADES DE PESO

La unidad principal es el **gramo (g).**

Múltiplos	Miriagramo (Mg)	$= 10.000$ g $= 10^4$ g	
	Kilogramo (Kg)	$= 1.000$ g $= 10^3$ g	Tonelada métrica (Tm) $= 1.000$ Kg; Quintal métrico (Qm) $= 100$ Kg
	Hectogramo (Hg)	$= 100$ g $= 10^2$ g	
	Decagramo (Dg)	$= 10$ g $= 10^1$ g	
	GRAMO (g)		
Submúltiplos	decigramo (dg)	$= 0{,}1$ g $= 10^{-1}$ g	
	centigramo (cg)	$= 0{,}01$ g $= 10^{-2}$ g	
	miligramo (mg)	$= 0{,}001$ g $= 10^{-3}$ g	

Obsérvese que las unidades de peso, aumentan o disminuyen de 10 en 10.

Ej.: Poner en gramos: 2 Kg, 3 Hg, 2 dg.

$$\begin{aligned} 2 \text{ Kg} &= 2 \cdot 1.000 = 2.000 \text{ g} \quad (3 \text{ lugares} = 3 \text{ ceros}) \\ 3 \text{ Hg} &= 3 \cdot 100 = 300 \text{ g} \quad (2 \text{ lugares} = 2 \text{ ceros}) \\ 2 \text{ dg} &= 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 \text{ g} \quad (1 \text{ lugar} = 1 \text{ cero}) \\ &\qquad\qquad\quad 2.300{,}2 \text{ g} \end{aligned}$$

8.–CUADRO RESUMEN DEL SISTEMA METRICO DECIMAL

MEDIDAS DE:

Longitud	Superficie	Agrarias	Volumen	Capacidad	Peso
Mm	Mm^2		Mm^3		
Km	Km^2		Km^3		
	Hm^2	Ha	Hm^3		
Dm	Dm	a			
m	m^2	ca	m^3	Kl	Tm
dm	dm^2		dm^3	l	Kg
				dl	Hg
				cl	Dg
cm	cm^2		cm^3	ml	g
					dg
					cg
mm	mm^2		mm^3		mg
10 en 10	100 en 100	100 en 100	1.000 en 1.000	10 en 10	10 en 10

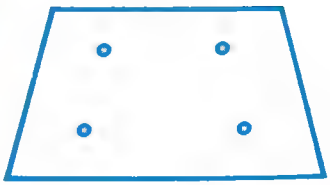
AUMENTAN O DISMINUYEN DE:

Mi oficina mide 16 metros cuadrados más la mitad de esa medida. ¿Cuánto mide mi oficina? 16 + 8 = 24. Veinticuatro metros cuadrados, ¿no? Pues no. Si yo digo que mi oficina mide 16 m^2 es que mide 16 m^2 y NO 24 m^2. Otra cosa hubiera sido que te dijera que mi oficina mide 16 + 8 m^2. Entonces sí medirla 24 m^2. La oficina mide 16 m^2 ó 24 m^2, pero ésta no puede ser de goma y estirarse y encogerse a conveniencia.

Si tú mides 1,60 m, no puedes medir al mismo tiempo 1,60 + 0,80 = 2,40 m. O mides 1,60 o mides 2,40 m, pero no puedes tener ambas medidas.

Los cuatro puntos que están dibujados a continuación tienen que unirse con **sólo dos rectas.** Pensarlo bien; tienen que estar perfectamente unidos los cuatro.

La solución en página 432



EL DON DE LA IMAGINACION

Está muy cerca el día en que a través de la informática se pierda el "don de la imaginación". Se están creando hoy día ya ordenadores tan perfectos que nos resolverán todo. Incluso ordenadores robot que funcionan en la cocina y de esta manera perderemos hasta el sebor del paladar. Pero lo que consideramos más grave es el crear estos ordenadores tan sofisticados que incluso piensen por nosotros. Llegado este momento, ya seremos pequeños "robots humanos", y el encanto de la inteligencia se habrá perdido. Este momento, creemos, está próximo. Este será el momento de nuestra destrucción como persona pensante.

9.—RELACIONES ENTRE EL SISTEMA METRICO DECIMAL Y EL SISTEMA INGLES DE UNIDADES

A.—Unidades de longitud

12 líneas = 1 pulgada (1 pulgada $\simeq$ 25,4 mm)
12 pulgadas = 1 pie
3 pies = 1 yarda
$5\frac{1}{2}$ yardas = 1 vara o percha
4 varas = 1 cadena
10 cadenas = 1 estadio
8 estadios = 1 milla

B.—Unidades de superficie

144 pulgadas cuadradas = 1 pie cuadrado (1 pulgada cuadrada $\simeq$ 645,16 mm^2)
9 pies cuadrados = 1 yarda cuadrada
$30\frac{1}{2}$ yardas cuadradas = 1 vara cuadrada
40 varas cuadradas = 1 rood
4 roods = 1 acre
4,84 yardas cuadradas = 1 acre
640 acres = 1 milla cuadrada
64.025 pies cuadrados = 1 claim

C.—Unidades de volumen

1.728 pulgadas cúbicas = pie cúbico (1 pulgada cúbica $\simeq$ $\simeq$ 16,38 cm^3)
27 pies cúbicos = 1 yarda cúbica
5,8 pies cúbicos = 1 bulk barrel

D.—Unidades de capacidad

1 dracma fluido = 1 onza fluida
5 onzas fluidas = 1 gill
2 gills = 1 pinta
2 pintas = 1 quart
4 quart = 1 galón imperial
2 galones = 1 peck (1 galón $\simeq$ 4,54 litros) (1 litro $\simeq$ 61 pulgadas cúbicas)
4 pecks = 1 bushel
8 bushels = 1 quarter
36 galones = 1 bulk barrel

E.—Unidades de peso

24 gramos = 1 pennyweight
437,5 gramos = 1 onza
16 onzas = 1 libra (1 Tn $\simeq$ 2.204,61 libras)
14 libras = 1 stone
28 libras = 1 quarter
4 quarters = 1 quintal
2.000 libras = 1 tonelada corta
20 quintales = 1 tonelada larga

F.—Otras unidades

1 tonelada registro = 100 pies cúbicos
1 milla náutica = 6.080 pies
6 pies = 1 braza
1 legua = 3 millas náuticas
1 nudo = 1 milla náutica/hora

NOTA: En la exposición de las unidades del sistema inglés se han relacionado algunas unidades de éste con unidades del sistema métrico decimal, para que el lector tenga algún elemento de partids que le sirva para establecer las relaciones entre las restantes unidades mediante simples multiplicaciones, o divisiones.

Hay que advertir también que, aunque el sistema británico es en reglas generales semejante al usado en Estados Unidos, existen ligeras diferencias acusadas sobre todo en los galones y toneladas.

TEMA 21

GEOMETRIA PLANA

INDICE

1.—ESTUDIO DE LA LINEA.
- A.—Línea recta
- B.—Línea quebrada.
- C.—Línea curva.
- D.—Línea mixta.

2.—ANGULOS Y SUS TIPOS.
- A.—Angulo recto.
- B.—Angulo agudo.
- C.—Angulo obtuso.
- D.—Angulo cóncavo y convexo.
- E.—Angulo llano.
- F.—Angulos consecutivos.
- G.—Angulos opuestos por el vértice.
- H.—Angulos adyacentes.

3.—FORMAS DE MEDIR UN ANGULO.
- A.—Grados sexagesimales.
- B.—Grados centesimales.
- C.—Conversión de grados sexagesimales a centesimales y viceversa.
- D.—Radianes.

4.—OPERACIONES CON ANGULOS.
- A.—Suma de ángulos.
- B.—Diferencia de ángulos.
- C.—Producto de un ángulo por un número.
- D.—Cociente de un ángulo entre un número.

5.—POLIGONOS.
- A.—Concepto de un polígono.
- B.—Número de diagonales de un polígono.
- C.—Suma de ángulos interiores de un polígono.
- D.—Suma de ángulos exteriores de un polígono.

6.—ESTUDIO GENERAL DE UN TRIANGULO.
- A.—Construccion geométrica de un triángulo.
- B.—Clasificación de los triángulos por sus lados.
- C.—Clasificación de los triángulos por sus ángulos.

D.—Estudio particular del triángulo rectángulo.
E.—Teorema de Pitágoras.
F.—Teorema de la altura.
G.—Teorema del cateto.
H.—Generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.

7.—FORMA DE UN TRIANGULO.

8.—PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE UN TRIANGULO.
A.—Baricentro.
B.—Circuncentro.
C.—Ortocentro.
D.—Incentro.

9.—SEMEJANZA DE TRIANGULOS.

10.—TEOREMA DE THALES.

11.—AREA DE UN TRIANGULO.

12.—FORMULA DE HERON.

13.—CUADRILATEROS.
A.—Clasificación por sus ángulos.
B.—Clasificación por sus lados.

14.—CUADRADO.

15.—RECTANGULO.

16.—PARALELOGRAMO.

17.—ROMBO.

18.—TRAPECIO.

19.—POLIGONOS REGULARES.

20.—CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO.
A.—Concepto.
B.—Líneas que se consideran en una circunferencia.
C.—Posiciones relativas de dos circunferencias.
D.—Angulos en la circunferencia.
E.—Longitud de una circunferencia.
F.—Longitud de un arco de circunferencia.
G.—Area del círculo.

21.—FIGURAS EN EL CIRCULO.
A.—Sector circular.
B.—Segmento circular.
C.—Corona o anillo circular.
D.—Trapecio circular.

22.—ELIPSE.

23.—COMPOSICION DE FIGURAS REGULARES.
A.—Lado y apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia en función del radio.
B.—Lado y apotema de un cuadrado circunscrito a una circunferencia en función del radio.
C.—Lado y apotema de un exágono inscrito a una circunferencia en función del radio.
D.—Lado y apotema de un exágono circunscrito a una circunferencia en función del radio.
E.—Lado y apotema de un triángulo equilátero, inscrito a una circunferencia en función del radio.
F.—Lado y apotema de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia en función del radio.

24.—PROBLEMAS DE RECAPITULACION.

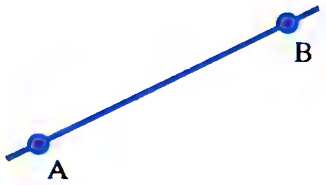
GEOMETRIA PLANA

1.–ESTUDIO DE LA LINEA

A.–Línea recta

Se llama así a un conjunto infinito de puntos alineados.

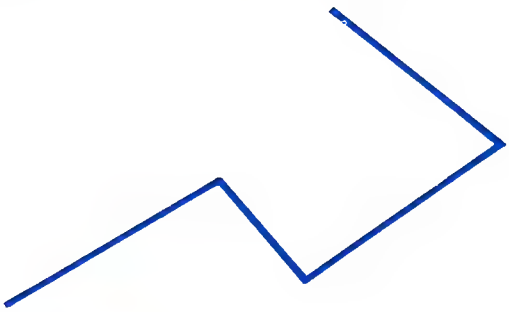
Una porción o trozo de linea recta recibe el nombre de **segmento.**



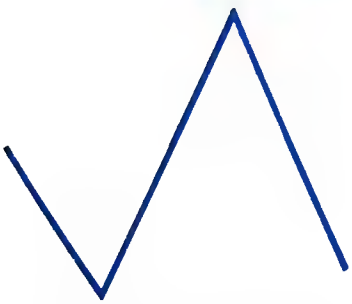
NOTA: Téngase en cuenta que para definir una línea recta es suficiente conocer dos puntos de ella, ya que por dos puntos cualquiera solamente es posible que pase una sola línea recta.

B.–Línea quebrada o poligonal

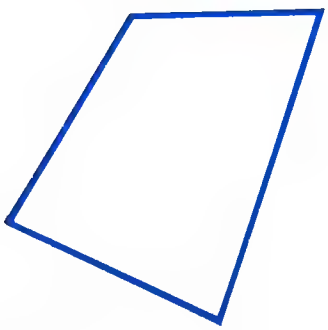
Es aquella que se compone de dos o más segmentos rectos, con distinta dirección y tales que el extremo de uno de ellos sea el origen del otro.



Si el principio y el final de la línea quebrada no coinciden, se dice que ésta es **abierta;** y si coinciden se dice que es **cerrada.**



Línea quebrada abierta



Línea quebrada cerrada

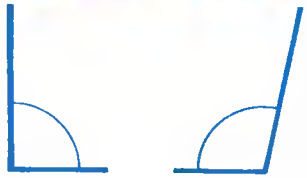
De todas las frutas que nos sirven para alimentarnos quizá la más popular sea la manzana, y su popularidad se debe a su sabor y aroma y a la fortaleza de su fruto.

Existen variedades que resisten temperaturas bajas y otras que se desarrollan en climas cálidos.

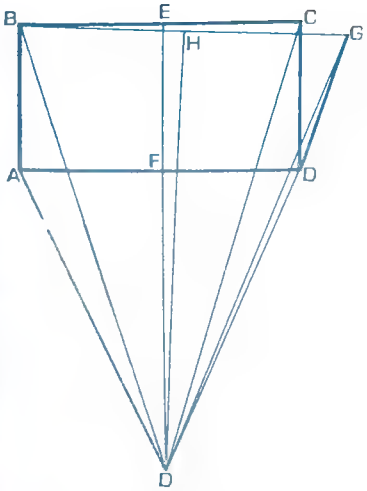
Ya en tiempos prehistóricos las mazanas se habían esparcido por Europa. En la Edad de Piedra los habitantes de los palafitos de Centro Europa las comían en gran cantidad. Por los restos encontrados en sus viviendas lacustres se deduce que las comían frescas y también las conservaban secándolas al sol.

Este árbol, cultivado con esmero, pudo ser una de los que iniciaron la agricultura europea. El escritor griego Teofasto cita ya las variedades conocidas en Grecia en el siglo IV antes de J.C. Con la pulpa de una variedad de manzana, prensada y fermentada, se fabrica la sidra, bebida popular en la región asturiana.

Pueden ser iguales?



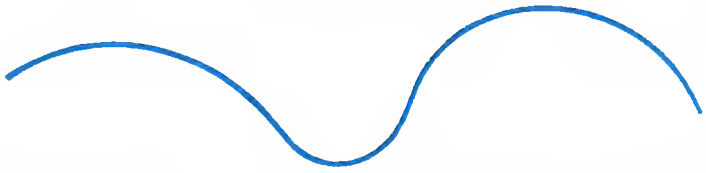
Sean ABCD un rectángulo. Buscamos primeramente el punto medio de BC y que es E y el punto medio de AD que es F. Unimos estos dos puntos por una recta EF, que por supuesto, será perpendicular a BC y a AD.



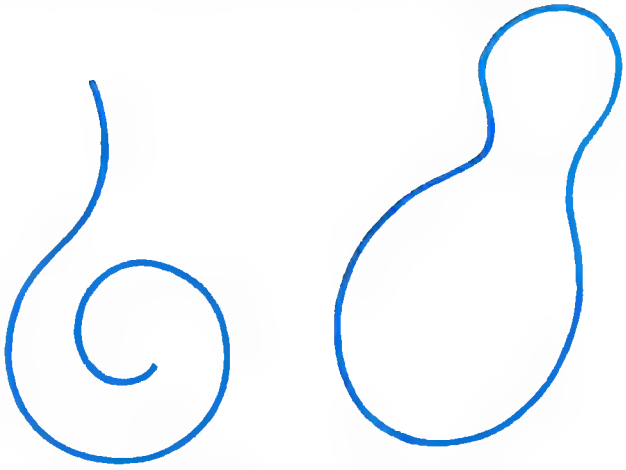
Continúa en la página siguiente.

C.—Línea curva

Es aquella que no posee ningún segmento recto.



Si los extremos de la línea curva no coinciden se dice que ésta es **abierta**; si coinciden se dice que ésta es **cerrada.**

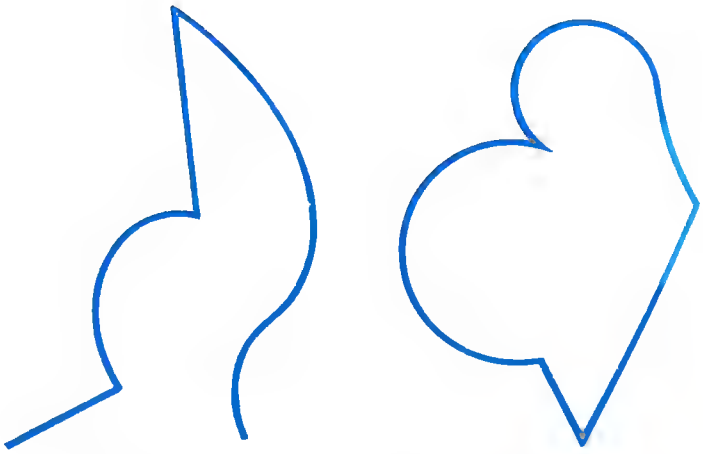


Línea curva abierta Línea curva cerrada

D.—Línea mixta

Se llama así a la línea que consta de segmentos rectos y curvos y entre dos cualquiera de ellos únicamente tienen un punto en común.

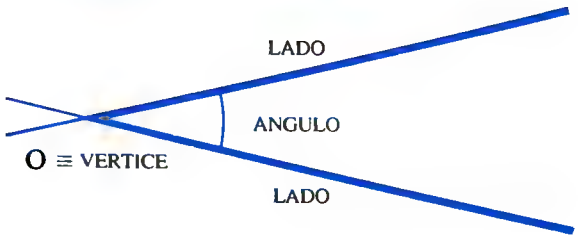
Pueden ser **abiertas** o **cerradas,** dependiendo de que los extremos no coincidan o coincidan respectivamente.



Línea mixta abierta Línea mixta cerrada

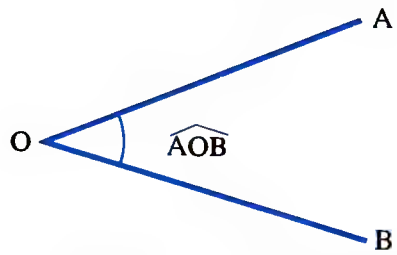
2.—ANGULOS Y SUS TIPOS

Dos rectas cualquiera, al cortarse, definen regiones en un plano, a la abertura que definen las dos semirrectas se le llama **ángulo,** el punto donde se cortan éstas **vértice** y las semirrectas propiamenta dichas **lados.**

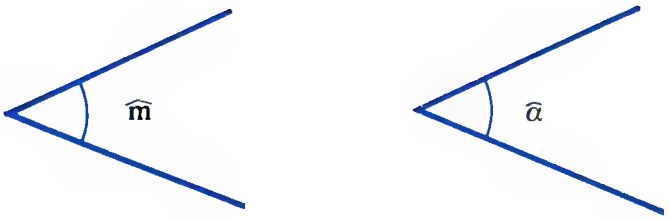


A los ángulos se les representa:

— Mediante tres letras que definen el vértice y los lados con un ángulo encima (la letra que correspondiente al vértice, se suele colocar en medio de las correspondientes a los lados).



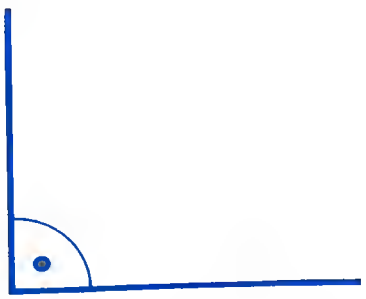
— Mediante una sola letra en el vértice con un ángulo encima.



NOTA.—A veces por comodidad se suele prescindir del ángulo que se coloca encima de la letra o letras, exponiendo simplemente éstas.

A.—Angulo recto

Es aquel que mide 90 ° y está definido concretamente por dos rectas perpendiculares.



Desde el punto D trazamos una recta DG que esté fuera del rectángulo y que sea, por construcción, igual a las AB y DC. Unimos el punto B con el G. De la línea BG sacamos el punto medio que es H. Por el punto H trazamos una perpendicular a BG, que se junta con la prolongación de EF en el punto O. Unimos O con todos los demás puntos, o sea, OA, OB, OC, OG y OH.

Vemos inmediatamente que los triángulos OAB y ODG son iguales, ya que todo punto que pertenece a HO, equidista de B y de G, OB es igual a OG. Por la misma razón EO es una recta perpendicular en el punto medio de BC y de AC, y entonces OA es igual a OD. Pero como hicimos GD igual por construcción a BA y a CD, tenemos entonces:

$$\overline{OA} = \overline{OD}$$

$$\overline{OB} = \overline{OG}$$

$$\overline{BA} = \overline{CD}$$

O sea, los tres lados del triángulo OAB son iguales a los tres lados del ODG. Pero el ángulo $\widehat{OAB} = \widehat{ODG}$ y también el ángulo $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$, ya que $\overline{OA} = \overline{OD}$.

Si restamos $\widehat{OAD}$ del $\widehat{OAB}$ nos queda el formado por el ángulo BAD que es perfectamente RECTO. Al ángulo ODG le restamos el ángulo $\widehat{ODA}$ y nos da el $\widehat{ADG}$, que es OBTUSO (mayor que un recto).

Resultando entonces que el ángulo $\widehat{BAD}$, que es RECTO, es igual al $\widehat{ADG}$ que es OBTUSO. De donde queda demostrado que un ángulo RECTO es igual a un ángulo OBTUSO.

NOTA: Al dibujar la figura la he forzado a mi conveniencia, para demostrar lo que he querido. Si la dibujáis con medidas y con un compás, veréis que no puede salir así este «sofisma geométrico por construcción».

¿Era así, Miguel Marset, el problema que hicimos hace 35 años y no nos acordábamos? A ti va dedicado el mismo.

Cuando Louis Braille sufrió el accidente que más tarde degeneró en ceguera, su vida quedó marcada por el infortunio de la oscuridad. Mas esta desgracia personal fue, sin duda, motivo de alegría para los invidentes de todo el mundo.

En 1819 ingresó en la Institución Real para jóvenes ciegos de París. Fue alumno y luego profesor. En esta escuela ingresó como profesor un personaje, Charles Barbier, que había sido capitán de artillería, un utópico soñador que llevaba quince años ideando sistemas de escritura secreta para poder escribir en la oscuridad.

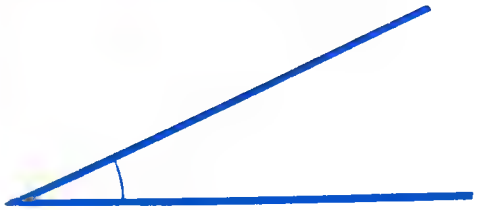
Ya en aquella época exitían intentos para, con letras normales impresas en relieve, conseguir que los ciegos pudieran leer por medio del tacto.

Barbier experimentó con un cuadro de signos fonéticos en relieve, fáciles de retener, y que se podían reproducir por medio de un punzón. Sus signos no tenían relación con los caracteres ordinarios; su sistema se componía de puntos de dos a doce.

Esta fue su intuición genial; pero él no era ciego y había que serlo para comprender el tacto y sus peculiaridades.

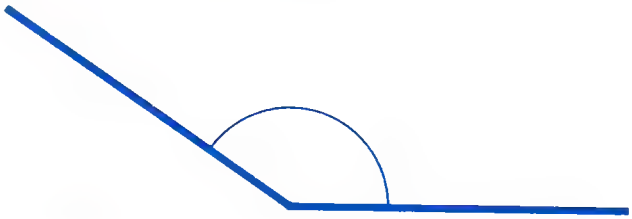
B.—Angulo agudo

Es aquel que mide menos de 90°.

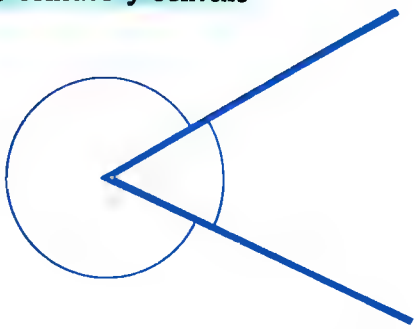


C.—Angulo obtuso

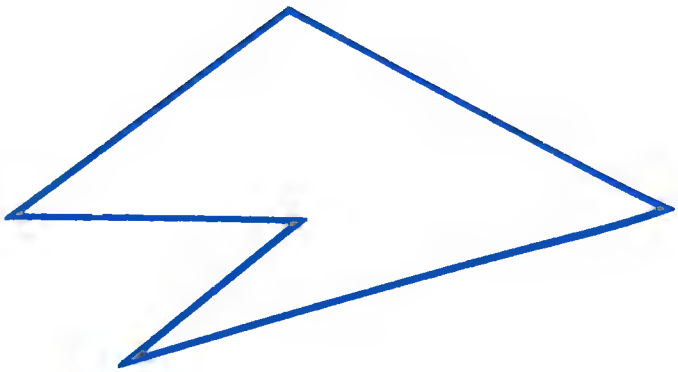
Es aquel que mide más de 90°.



D.—Angulo cóncavo y convexo



Ej.: En la siguiente poligonal cerrada obsérvese cuáles son ángulos convexos y cóncavos.

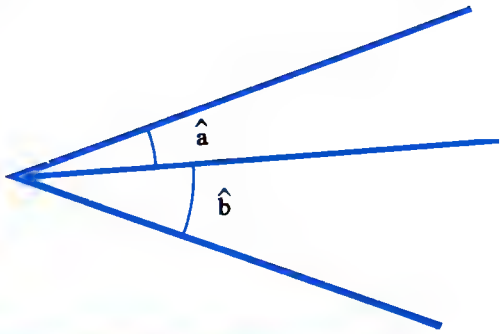


E.—Angulo llano

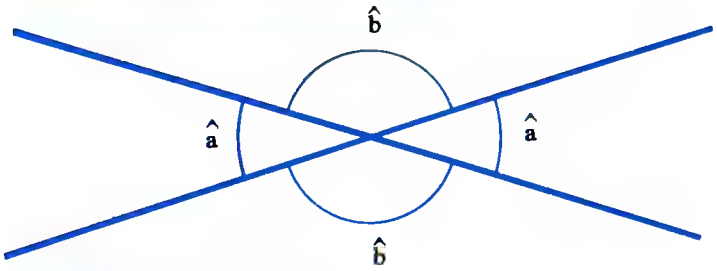
Es aquel que mide 180°.

F.—Angulos consecutivos

Son aquellos ángulos que tienen el mismo vértice y tienen un lado común.

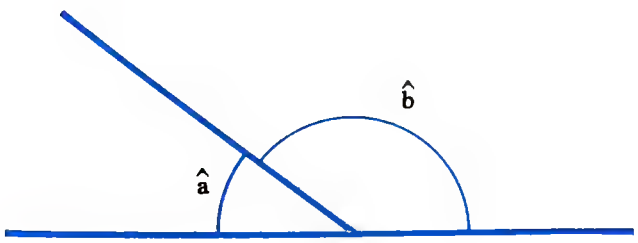


G.—Angulos opuestos por el vértice

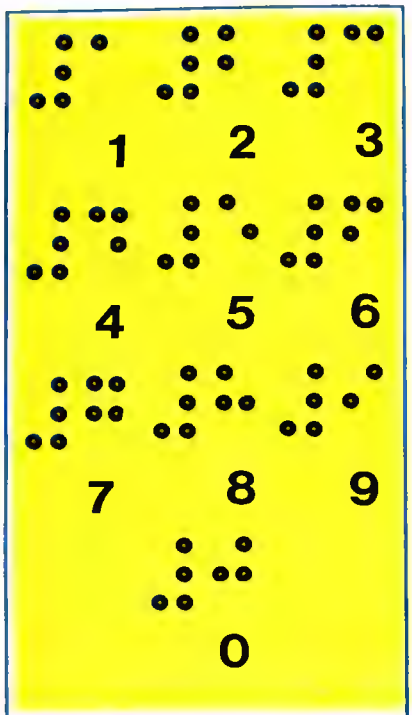


H.—Angulos adyacentes

Se llaman así a dos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes están en prolongación.



Cualquiera de los ángulos adyacentes recibe también el nombre de **ángulo oblicuo.**



Braille se contentó con seis puntos, dos filas de tres puntos dispuestas paralelamente.

Con seis puntos se pueden formar sesenta y cuatro combinaciones, más la ausencia de puntos.

Creó una primera serie de diez signos (letras de la A hasta la J); luego una segunda serie con un punto debajo a la izquierda (letras entre la K y la T); una tercera serie con dos puntos debajo de la serie fundamental y una cuarta serie con el punto a su derecha. Otra quinta serie desarrolla trece signos que complementan los básicos citados anteriormente.

La perfección del alfabeto de Braille hace que sea como un juego aprenderlo. Cualquier niño invidente puede asimilarlo fácilmente.

Algún matemático puede opinar que serían más lógicas otras combinaciones; pero es que Braille, aunque procediera con método, no lo hizo como matemático puro, sino como ciego, es decir, conociendo perfectamente los recursos y limitaciones del sentido del tacto.

Se han intentado muchas reformas, pero siempre se vuelve al sistema ideado por este ciego genial.

Cuando el rico ganadero perdió una oveja, mandó inmediatamente que todos sus criados salieran a buscarla y rogó a su vecino que también le ayudase. Este, extrañado de tanto movimiento, le preguntó:

—¿Cómo es que emplea a tantos hombres para buscar a un solo animal?

—Son muchos los senderos que puede haber seguido —le contestó.

Efectivamente, al fin de la tarde volvieron todos sin haber encontrado nada.

—Hay demasiados senderos, y unos se mezclan con otros; así nos perdimos y no pudimos orientarnos —le indicaron los criados.

El vecino, hombre estudioso y amigo de sacar provecho intelectual de las situaciones, quedó pensativo. Permaneció silencioso largo tiempo y no sonrió en varios días.

Sus amigos estaban preocupados.

—Una oveja no tiene importancia —decía—, y ésta ni siquiera es suya.

Cuando hay demasiados senderos un hombre no puede encontrar una oveja.

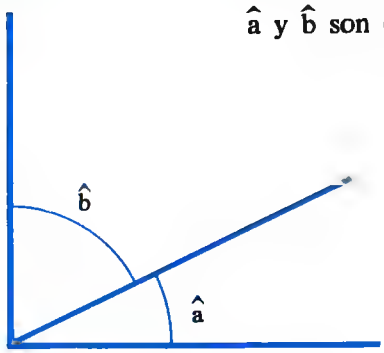
Cuando un estudiante se dedica a demasiadas materias malgasta su tiempo y pierde su ruta.

Esta es la lección, y sin embargo parece que no le habían comprendido.

I.—Angulos complementarios

Son aquellos ángulos cuya suma es igual a un ángulo recto.

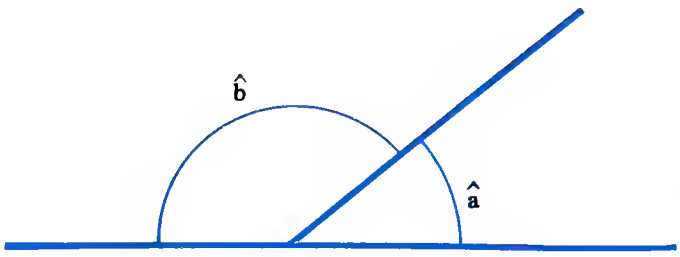
$\hat{a}$ y $\hat{b}$ son complementarios



J.—Angulos suplementarios

Son aquellos ángulos cuya suma es igual a un ángulo llano o dos rectos.

$\hat{a}$ y $\hat{b}$ son suplementarios



3.—FORMAS DE MEDIR UN ANGULO

A.—Grados sexagesimales

Si un giro completo lo dividimos en 360 partes, cada una de éstas es un grado sexagesimal.

$1^{\circ} = 60'$ (Un grado sexagesimal igual a 60 minutos sexagesimales).

$1 = 60''$ (Un minuto sexagesimal igual a 60 segundos sexagesimales).

B.—Grados centesimales

Si un giro completo lo dividimos en 400 partes, cada uno de estas es un grado centesimal.

$1^{g} = 100^{m}$ (Un grado centesimal igual a 100 minutos centesimales).

$1^{m} = 100^{s}$ (Un minuto centesimal igual a 100 segundos centesimales).

NOTA.—Adviértase la diferencia de representación para los grados sexagesimales y centesimales.

En matemática pura son de uso común los grados sexagesimales, sin embargo en la actividad práctica como la ingeniería son de uso frecuente los grados centesimales.

C.—Conversión de grados sexagesimales a centesimales y viceversa

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si un giro} = 360^\circ \\ \text{Si un giro} = 400^g\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{360^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 400^g}$$

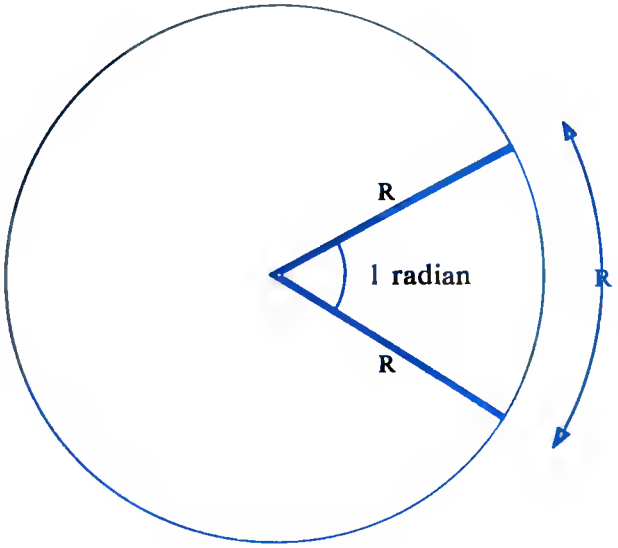
Obsérvese que hemos obtenido una relación entre grados sexagesimales y centesimales que expresa la condición de regla de tres, necesaria para la conversión (las magnitudes son siempre directamente proporcionales).

Ej.: Averiguar cuántos grados centesimales son 72°:

$$\left.\begin{array}{l}360^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots 400^g \\ 72^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{360}{72} = \frac{400}{x} \rightarrow x = \frac{400 \cdot 72}{360} = 80^g$$

D.—Radianes

Se entiende por radián el ángulo central de una circunferencia que abarca una longitud de arco igual a su radio.



A los 360° de un giro completo o circunferencia le corresponden siempre 2π radianes.

$$\boxed{360^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2\pi \text{ radianes}}$$

CAFE

Reunidos en casa de unos amigos varios mátrimonios, me ocurrió lo siguiente: saqué un cigarrillo y antes de encenderlo se me cayó en una taza llena de café. No pasó nada; lo saqué, encendí y me lo fumé, y además estaba completamente seco. ¿Por qué?

No sé qué pasa que cuando se piensa en una taza de café siempre es en café líquido y no en café EN GRANO o MOLIDO.

Es lo mismo que si digo que en Navidad se le cayó a mi esposa un pendiente a la piscina, la cual estaba completamente llena; me agaché y lo cogí sin ni siquiera mojarme la mano. ¿Por qué tiene que estar la piscina llena de agua, y no que esté **helada**, ya que he dicho por Navidad?

EL AUTOCAR

Imagínate que eres conductor de un autocar. Este tiene una cantidad de años enorme y todo son pegas: necesita pintura, el carburador no funciona debidamente, los frenos necesitan revisión, los neumáticos están muy gastados, necesita revisión del motor, aceite, engrase, gasolina, en fin... ¿Qué edad tiene el conductor?

LA SOLUCION EN (pág. 432).

EL BIZCOCHO

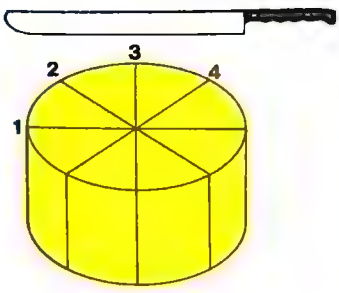
De todo cuanto nos rodea se pueden sacar deducciones y enseñanzas. Sacar problemas de donde a simple vista no los hay es muy útil para aguzar el ingenio.

Un día nos juntamos en casa a desayunar ocho personas.

Teníamos un hermosísimo bizcocho, el cual habría que partirlo en ocho trozos y con un cuchillo que al menos tuviera la hoja más longitud que el diámetro del bizcocho, o sea, con **cuatro** cortes en diagonal. Esto es lo normal que se hace siempre, es decir, como indica el dibujo.

Sin embargo, a mí se me ocurrió que con sólo **tres** cortes de ese mismo cuchillo se cortaría el bizcocho.

LA SOLUCION EN (Pág. 432).



Ej.: Averiguar cuántos grados sexagesimales y centesimales son $\frac{3\pi}{2}$ Rad.

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \ldots\ldots\ 2\pi \text{ RAD} \\ x \ \ldots\ldots\ \frac{3\pi}{2} \text{ RAD} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{360}{x} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} \rightarrow x = \frac{360^\circ \cdot \frac{3\pi}{2}}{2\pi} = 270^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} 400^g \ldots\ldots\ 2\pi \text{ RAD} \\ x \ \ldots\ldots\ \frac{3\pi}{2} \text{ RAD} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{400}{x} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} \rightarrow x = \frac{400 \cdot \frac{3\pi}{2}}{2\pi} = 300^g$$

NOTA.—En matemáticas es frecuente que se presenten la medida de ángulos en radianes (sobre todo en el caso de la Trigonometría que más tarde abordaremos) y para hacerse más cómodo el paso a grados sexagesimales se suele sustituir el π de la medida en radianes por 180° y se opera todo el contenido (téngase en cuenta que si $360^\circ = 2\pi$ rad. es que $180^\circ = \pi$ rad.).

Lo mismo podríamos hacer para pasar a grados centesimales teniendo en cuenta que la sustitución es $200^g = \pi$ rad.

Ej.: Poner en grados sexagesimales $\frac{\pi}{2}$ rad.

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

4.—OPERACIONES CON ANGULOS

A.—Suma de ángulos

Se suman respectivamente sus grados, minutos y segundos teniendo en cuenta que los minutos que se pasen de 60 se añadirán a los grados y los segundos que pasen de 60 se añadirán a los minutos, para el caso de grados sexagesimales. Lo mismo ocurre para los grados centesimales.

Ej.: Sumar los siguientes ángulos:

$$\begin{array}{r} 3^\circ\ 25'\ 40'' \\ 12^\circ\ 42'\ 30'' \\ \hline 15^\circ\ 67'\ 70'' = 15^\circ\ 68'\ 10'' = 16^\circ\ 8'\ 10'' \end{array}$$

$60'' = 1'$ $\quad 60' = 1^\circ$

B.—Diferencia de ángulos

Para restar ángulos es conveniente tener en cuenta que el minuendo (primera cantidad) tenga sus grados, minutos y segundos mayores que el sustraendo (segunda cantidad) como regla general y para facilitar la diferencia y siempre que sea posible tal preparación.

Ej.: Restar los siguientes ángulos: $2^\circ\ 85'\ 41''$ menos $3^\circ\ 2'\ 5''$:

$$\begin{array}{r} 2^\circ\ 85'\ 41'' \\ -\ 3^\circ\ 2'\ 5'' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 3^\circ\ 25'\ 41'' \\ -\ 3^\circ\ 2'\ 5'' \\ \hline +\ 0^\circ\ 23'\ 36'' \end{array}$$

NOTA.—El resultado es positivo, ya que el minuendo es mayor que el sustraendo.

Ej.: Restar los siguientes ángulos: $21^\circ\ 32'\ 6''$ menos $25^\circ\ 7'\ 30''$.

$$\begin{array}{r} 21^\circ\ 32'\ 6'' \\ -\ 25^\circ\ 7'\ 30'' \\ \hline -\ 4^\circ\ 25'\ 24'' \end{array}$$

NOTA.—El resultado es negativo, ya que el minuendo es más pequeño que el sustraendo.

C.—Producto de un ángulo por un número

Se multiplica independientemente el número por los grados, minutos y segundos del ángulo en cuestión.

Ej.: Multiplicar:

$$\begin{array}{r} 3^\circ\ 26'\ 40'' \\ \times\ 5 \\ \hline 15^\circ\ 130'\ 200'' \end{array} = 15^\circ\ 133'\ 20'' = 17^\circ\ 13'\ 20''$$

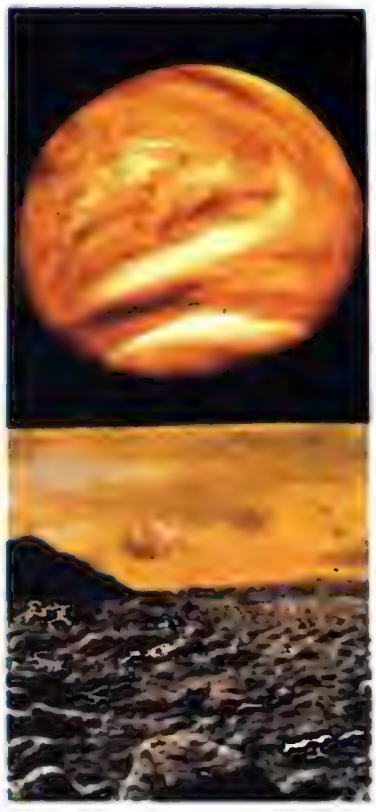
$$180'' = 3' \qquad 120' = 2^\circ$$

D.—Cociente de un ángulo entre un número

Se dividen separadamente los grados minutos y segundos entre el número en cuestión, teniendo en cuenta que los restos de grados se multiplicarán por 60 para convertirlos en minutos añadidos con los que haya y los restos de minutos se multiplican por 60 para convertirlos en segundos y se añadirán con los que haya; los restos de segundos se suelen poner en forma de fracción junto con los que se obtengan en el cociente:

Ej.: Dividir $32^\circ\ 27'\ 41''$ entre 5:

$$\begin{array}{lll} 32^\circ & 27' & 41'' \\ 2 \times 60 = & 120' & \\ \hline & 147' & \\ & 47 & \\ & 2 \times 60 = & 120'' \\ \hline & & 161'' \\ & & 11 \\ & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} 5 \\ \hline 6^\circ\ 29'\ 32'' \end{array}$$



La edad de la Tierra, según los últimos estudios realizados por medio de modernos analizadores atómicos y comprobados por computadoras, se puede fijar en 4.700 millones de años, y se calcula que la vida humana en nuestro planeta se hará insoportable dentro de 10.000 millones de años, y ello debido al aumento de la temperatura que el Sol irradia hacia la tierra.

Los primeros restos que existen pertenecientes al "Homo Sapiens" fueron hallados en Hungría, y consisten en un hueso occipital casi completo y parte de un cráneo con una capacidad de unos 1.400 cm^3; se les atribuye una antigüedad aproximada de 400.000 años. Es curioso el cálculo realizado según el cual, si la edad total de la tierra la reducimos a un año de nuestro calendario, el hombre apareció en escena alrededor de las 8 horas, 5 minutos, del día 31 de Diciembre. Esto nos da idea de lo moderna que es nuestra existencia en cantidades relativas.

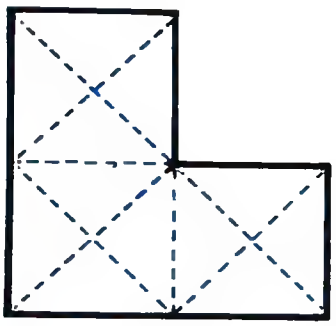
SOLUCION AL PROBLEMA DEL TERRENO DE LA PAGINA 396:

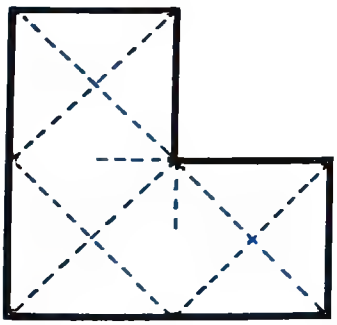
Este era el terreno.

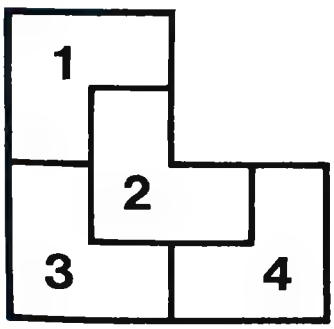
Bien, vamos a irlo subdividiendo en partes, como indicamos en la siguiente figura, y por puntos:

Ya tenemos las cuatro partes, veamos:

Fácil, ¿verdad?







Definitivamente:

$$32^\circ\ 27'\ 41'' : 5 = 6^\circ\ 29'\ 32\frac{1''}{5}$$

Ej.: Dividir $63^\circ\ 82'\ 71''$ entre 3.

Inicialmente vamos a preparar la división:

$$63^\circ\ 82'\ 71'' = 63^\circ\ 83'\ 11'' = 64^\circ\ 23'\ 11''$$

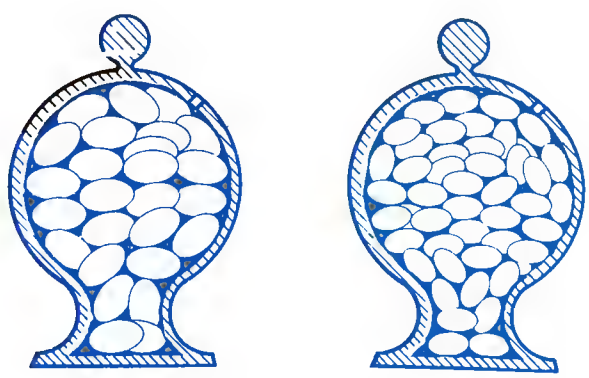
$$\begin{array}{lll|l}
64^\circ & 23' & 11'' & 3 \\ \cline{4-4}
01 \times 60 = & \underline{60'} & & 21^\circ\ 27'\ 43'' \\
 & 83' & & \\
 & 23 & & \\
 & 2 \times 60 = & \underline{120''} & \\
 & & 131'' & \\
 & & 11 & \\
 & & \underbrace{2} &
\end{array}$$

$$64^\circ\ 23'\ 11'' : 3 = 21^\circ\ 27'\ 43\frac{2''}{3}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE LAS HUCHAS DE LA PAGINA 389:

El valor es el mismo en ambos casos. Es lo mismo que llenar un saco de arena de río y otro de cantos rodados. El problema de los **espacios** huecos es el mismo en un caso que en el otro. Si en uno, el espacio hueco es más grande, en el otro los espacios huecos son mucho más, por lo tanto pesará lo mismo.

Aunque distinto, es como si dijéramos: ¿Qué pesa más un kilogramo de hierro o un kilogramo de paja?



SOLUCION AL OTRO PROBLEMA DE LA PAGINA 389:

Los números anterior y posterior de la sucesión son el 7 y el 31, ya que ésta es una sucesión de... números primos.

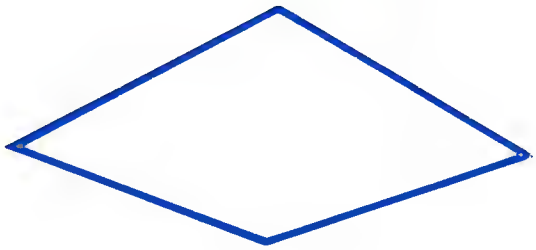
5.–POLIGONOS

A.–Concepto de polígono

Se entiende por polígono a cualquier línea quebrada o poligonal cerrada. Los polígonos se pueden clasificar de dos formas:

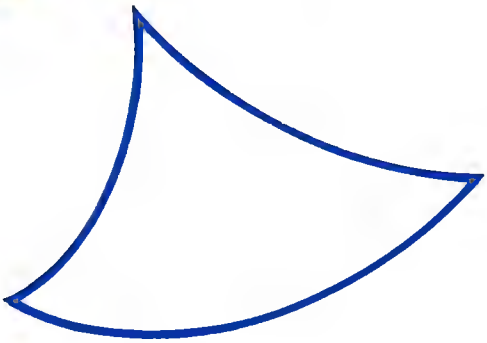
–Por la forma de la línea quebrada

Rectilíneos.–Los que están formados por líneas quebradas rectas.

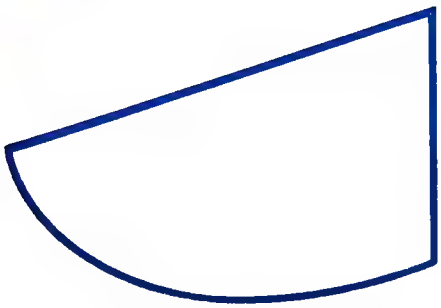


A su vez éstos pueden ser: triángulo (3 lados), cuadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), exágono (6 lados), heptágono (7 lados), octógono (8 lados), etc.

Curvilíneos.–Los que están formados por líneas quebradas curvas.



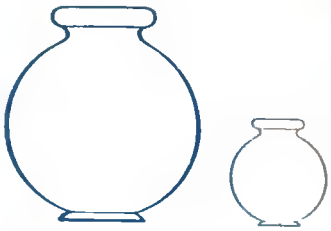
Mixtilíneos.–Los que están formados por líneas quebradas curvas y rectas a la vez.



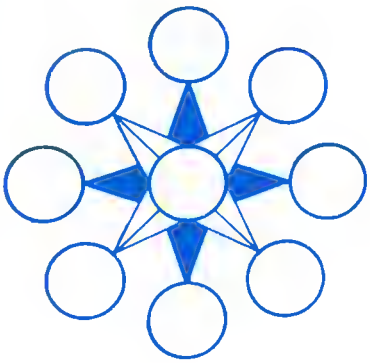
La aceituna es un fruto que puede fácilmente localizarse en el principio de la humanidad. Los primeros libros hebreos la mencionan. La Biblia cuenta cómo regresó la paloma al arca de Noé con una rama de olivo en el pico. Se conocía y se cultivaba en Siria, en Egipto, en Grecia, y, un poco más tarde, en Roma.

Los antiguos empleaban el aceite de oliva para alimentarse, como medicina y para friccionar su cuerpo. Los romanos decían que una vida larga y feliz dependía de dos líquidos: "vino por dentro y aceite por fuera". También se empleaba en las lámparas de alumbrado, de las cuales han llegado a nosotros cientos de ejemplares, desde el modesto cristal y el tosco barro hasta los materiales más nobles.

Los métodos para extraer el aceite varían mucho, en su forma artesanal, de un país a otro; no así en su actual forma industrializada que emplea moderna y costosa maquinaria hidráulica.



Tenemos dos vasijas de cristal, de la miama forma, con las paredes del mismo grosor. Si la capacidad de la primera es ocho veces mayor que le segunda, se pregunta: ¿cuántas vecea peaará más la una que la otra?

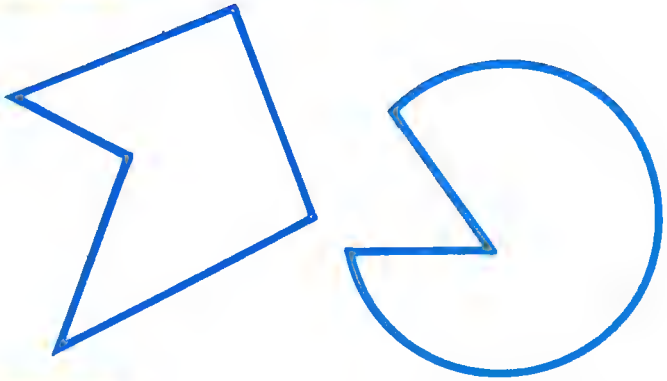


Despuáa de ver el cuadrado con 9 casillas y que sumen 15 en cualquier dlracclón, vamos a ver ahora en una estrella el mismo problema. ¡Ojo, otra vez, con el número del centro!

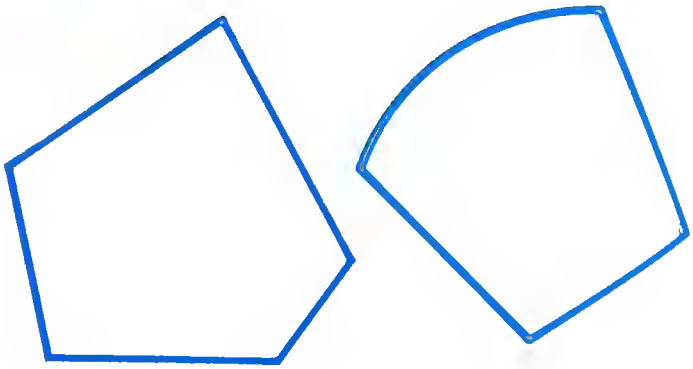
La solución en pág. 448.

—Por la forma de sus ángulos:

Cóncavos.—Los que poseen algún ángulo cóncavo.



Convexos.—Los que tienen todos los ángulos convexos.



NOTA.—Un polígono es regular cuando todos sus lados y consecuentemente sus ángulos son iguales.

B.—Número de diagonales de un polígono

Se entiende por diagonal de un polígono a la recta que une dos vértices no consecutivos del polígono y se entiende por lado de un polígono a la recta que une dos vértices consecutivos del polígono.

El número de diagonales de un polígono equivale a la mitad de tantos lados como tenga el polígono por el número de lados menos tres.

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

La demostración de esta fórmula ya se ha expuesto en el tema de combinatoria.

NOTA.—Lógico es pensar que en cualquier polígono el número de lados es el mismo que el número de vértices del polígono.

Ej.: ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 10 lados?

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ diagonales}$$

Ej.: Hallar el número de vértices de un polígono en el que se pueden trazar 65 diagonales.

$$65 = \frac{n(n-3)}{2}; \quad 130 = n(n-3), \quad 130 = n^2 - 3n;$$

$$n^2 - 3n - 130 = 0;$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 520}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{3 \pm 23}{2} = \begin{cases} 13 \\ -10 \end{cases}$$

La solución negativa queda descartada por la imposibilidad de que un polígono tenga vértices negativos, luego la solución es:

13 lados = 13 vértices.

C.—Suma de los ángulos interiores de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un polígono es tantas veces dos rectos como lados tenga el polígono menos dos:

$S = 2\ (n - 2)$ rectos $= 180\ (n - 2)$ grados sexagesimales

Ej.: Hallar la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

$$S = 2\ (n - 2) = 2\ (3 - 2) = 2 \cdot 1 = 2 \text{ rectos} = 2 \cdot 90 = 180^\circ$$

Ej.: Hallar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

$$S = 2\ (4 - 2) = 2 \cdot 2 = 4 \text{ rectos} = 4 \cdot 90 = 360^\circ$$

Ej.: Hallar la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

$$S = 2\ (5 - 2) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ rectos} = 6 \cdot 90 = 540^\circ$$

Ej.: La suma de todos los ángulos interiores de un polígono convexo regular es de 1.080°. Calcular los lados que tiene, los vértices, las diagonales y el valor de cada uno de sus ángulos.

$$1.080^\circ = 180\ (n - 2) \rightarrow \frac{1.080}{180} = n - 2 \rightarrow 6 = n - 2 \rightarrow n = 8$$

8 lados = 8 vértices

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ diagonales}$$

Como el polígono es regular, sus 8 ángulos serán todos iguales. Así que cada uno de ellos mide:

$$\frac{1.080^\circ}{8} = 135^\circ$$

El diseño industrial es una parte importantísima de la complicada actividad de cualquier fábrica, y cada día se le da mayor importancia. Un buen diseño puede hacer que los compradores se vuelquen literalmente sobre un producto, despreciando a los de la competencia, aun cuando sus características técnicas sean muy parecidas. El diseñador industrial es un profesional cuyo trabajo participa del arte y de los más refinados cálculos; él tiene que conservar los logros de los ingenieros y darles una bella forma. Los cálculos matemáticos, de resistencia de materiales, los pesos, y su funcionamiento correcto, tienen que ser respetados y, sin modificaciones sustanciales, envolverlos en una bella carrocería o darles una forma altamente atractiva.

Las compañías que producen a escala mundial saben lo importante que es un buen equipo de diseñadores. Ellos desarrollan y calculan desde un envase para perfume hasta la línea de un avión de pasajeros.

COMO ADIVINAR EL RESULTADO DE UNA SUMA

1.°) Le decimos a un amigo que escriba un número de tantas cifras como quiera, del 1 al 9. Cuatro, seis, ocho cifras. Les que desee.

2.°) Vamos a suponer que ha escrito un número de 7 cifras (p. ej. el número 6457542).

3.°) Por cada une de las cifras que haya puesto, nosotros las sustituimos por un 9. Como son 7 cifras, tenemos 7 nueves: 9999999.

4.°) Le preguntamos que, debajo de esa cifra, cuántos más quiere poner para hecer une suma y a condición de que debajo de ceda una de eses cifres nosotros pongemos otre.

Por ejemplo: él quiere escribir 4 cifras más pare sumar.

5.°) Multiplicamos inmediatamente los 7 nueves por 4 (ye que son las cifras que quiere escribir para sumar) y hecemos:

$$9999999 \times 4 = 39999996$$

Lo hacemos esto aperte y le decimos que nosotros, entes de que él escriba los números, le demos el resultado de la suma que es exactamente el resultedo que nos ha dedo le multiplicación.

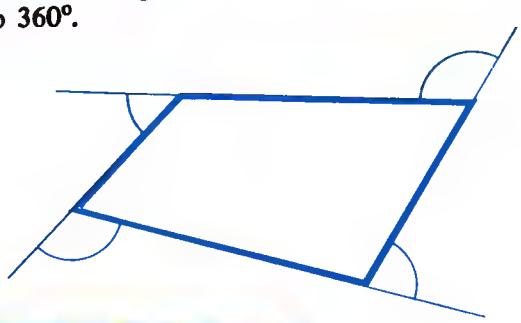
6.°) A cada número de los sumados que ponga nuestro amigo, nosotros ponemos el complemento al 9 y debajo, o sea: pone un 6, nosotros debejo un 3; pone un 1, nosotros debajo un 8, y así sucesivamente.

Donde nuestro amigo ponga una cifra, nosotros pondremos una A y donde nosotros pongamos nuestra cifra, una N. Veamos:

6 4 5 7 5 4 2	(A)
3 5 4 2 4 5 7	(N)
1 7 3 2 4 7 2	(A)
8 2 6 7 5 2 7	(N)
9 4 5 7 4 8 1	(A)
0 5 4 2 5 1 8	(N)
0 0 5 0 0 3 7	(A)
9 9 4 9 9 6 2	(N)
3 9.9 9 9.9 9 6	

D.–Suma de los ángulos exteriores de un polígono

La suma de los ángulos exteriores de un polígono vale siempre 4 rectos o 360°.



E.–Semejanza de polígonos

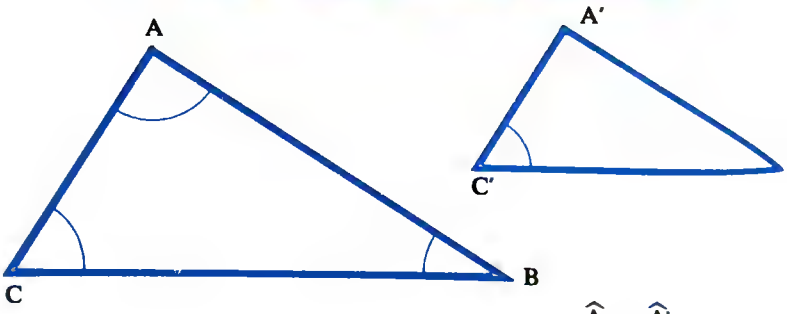
En general dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos iguales y consecuentemente sus lados proporcionales.

Este concepto es aplicable a cualquier polígono empezando por el más elemental como es el triángulo.

Dicho de otra manera, dos polígonos son semejantes cuando tienen la misma forma y distinto tamaño.

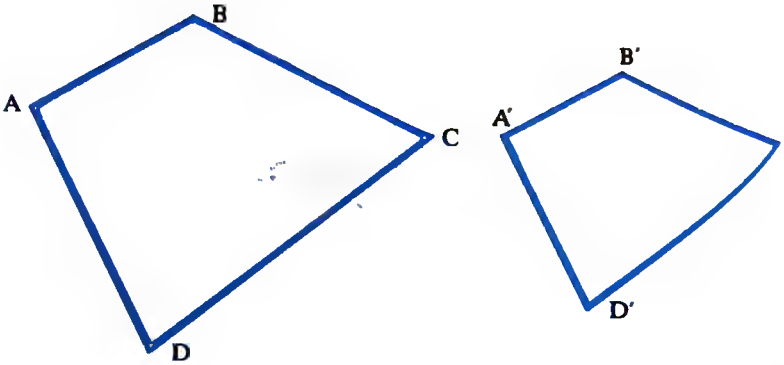
En cualesquiera dos polígonos semejantes es conveniente hacer las siguientes consideraciones:

– Se llaman **ángulos homólogos o correspondientes** a los que son respectivamente iguales en los dos polígonos.



Son ángulos homólogos: $\hat{A}$ y $\hat{A}'$; $\hat{B}$ y $\hat{B}'$; $\hat{C}$ y $\hat{C}'$

NOTA.–La semejsnza se expresa así: $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{A'B'C'}$



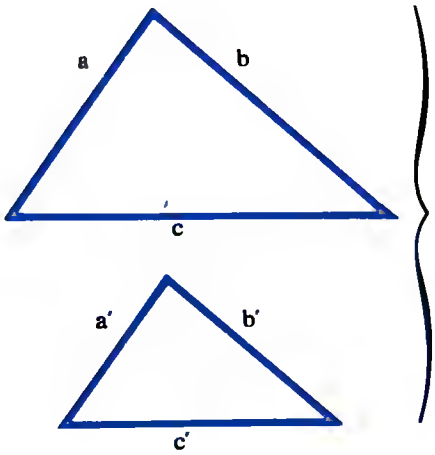
Son ángulos homólogos: $\hat{A}$ y $\hat{A}'$, $\hat{B}$ y $\hat{B}'$, $\hat{C}$ y $\hat{C}'$, $\hat{D}$ y $\hat{D}'$

NOTA.—La semejanza se expresa si: ABCA ~ A'B'C'D'

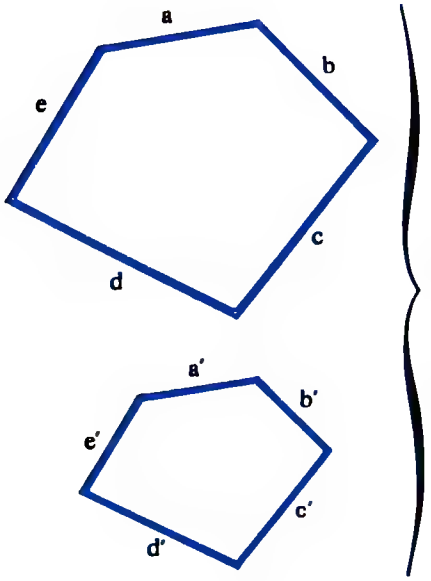
— Se llaman **vértices homólogos** a los que corresponden a ángulos homólogos.

Se llaman **lados homólogos** a los que unen vértices homólogos.

En dos polígonos semejantes sus lados deben ser directamente proporcionales.



$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=K$$



$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\frac{e}{e'}=K$$

En un aparcamiento se encuentran dos amigas que hacía muchos años no se veían.

Una de ellas seguía soltera y la otra se había casado y tenía tres hijos.

Al preguntarle la edad, éste le contesta con un problema:

Si sumamos la edad de los tres niños nos da 13, y si la multiplicamos nos da una cantidad que es igual al número de la matrícula de mi coche, 36, según puede verse en el dibujo.

La soltera, gran aficionada a las matemáticas, piensa un momento y le dice:

—Me falta un dato.

—Es verdad, la mayor está en cuarto de E.G.B.

¿Qué edadea tienen los niños?

LA SOLUCION PAGINA 448.

Hace poco más de un siglo no se conocían productos efectivos para anestesiar a las personas que iban a ser intervenidas quirúrgicamente. Jackson comprobó casualmente los efectos del éter en personas que respiraron este gas, escapado de un recipiente mal cerrado que lo contenía.

Pero fue el dentista Morton quien, al saber por Jackson las cerecteristices de este producto, se dirigió al cirujano Colliua de Boston y le propuso probarlo en uno de sus pacientes. Así el 16 de octubre de 1846 en une operación tumorel en el cuello se efectuó el primer ensayo que fue un completo éxito.

En 1847, en Edimburgo, James Simpson, poco setisfecho con los efectos del éter, pidió muestres e varios sabios que trebejaben en enestésicos y laa sxperimentó en sí mismo y en elgunos de sus amigos.

Al recibir les muestres del cloroformo que había fabricado Justus Von Liebig, estuvo a punto de rechezarlo porque no le gustó su especto.

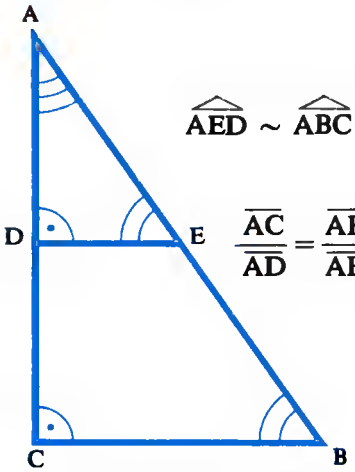
Unos añoa más tarde lo usaron para intervenir a la reina Victoria de Inglaterra.

La anestesia fue la puerta que abrió el campo inmenso de le cirugía moderne, ya que los grandes dolores que sufrían loa pacientes impedían trabejer y experimentar trenquilamente a los médicos.

Todas las fracciones resultantes de la proporcionalidad, naturalmente deben ser equivalentes, en iguales a un número K que recibe el nombre de **constante de proporcionalidad** o **razón de semejanza.**

NOTA.—Téngase en cuenta que al estsblecer la proporcionalidad entre los lsdos de dos triángulos semejantes, siempre hay que mantener un mismo orden en dicha proporcionalidad. Es decir, ir colocando los datos del primero al segundo o al revés, pero siempre con el mismo orden, para evitar complicaciones. La razón de semejanza irá también expresada en ese mismo orden.

Obsérvese en la siguiente figura la posibilidad de semejanzs que podemos estabiecer, todas válidas.

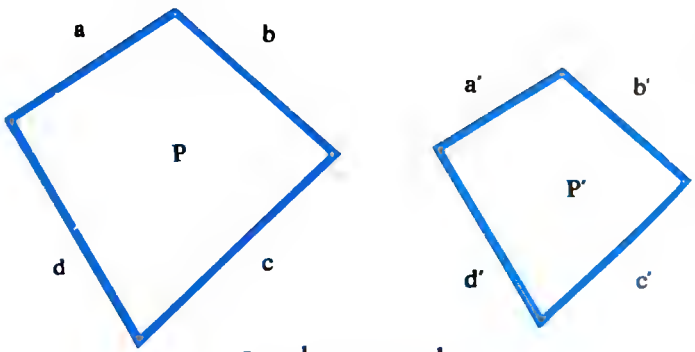


$\widehat{AED} \sim \widehat{ABC}$ por tener sus tres ángulos iguales

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}}$ y todas las combinaciones posibles con las tres proporciones obtenidas

Este tipo de triángulos semejantes y con esta disposición suelen ser frecuentes en la geometría del espacio, para el cálculo de longitudes necesarias para obtener áreas y volúmenes de cuerpos en tres dimensiones.

— De la misma forma, en dos polígonos que sean semejantes, la razón de sus perímetros es igual también a la razón de semejanza o constante de proporcionalidad K.

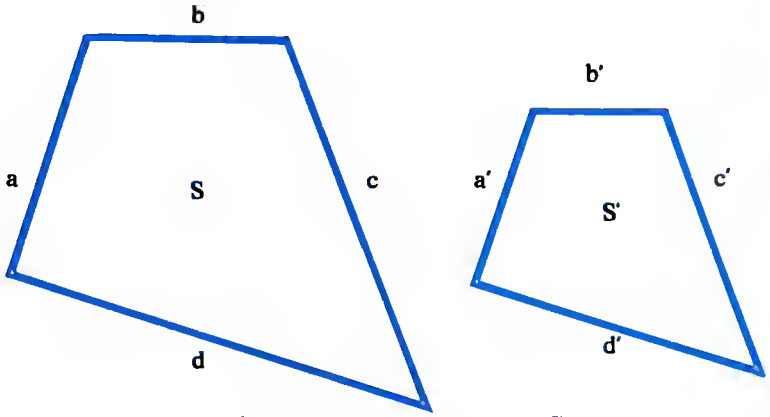


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = K$$

Aplicando una de las propiedades de las proporciones para razones iguales, obtenemos:

$$\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = K \Rightarrow \frac{P}{P'} = K$$

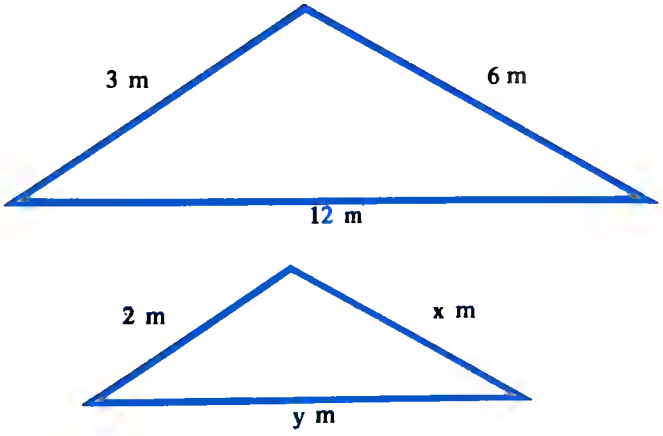
– La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.



$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=K \qquad \frac{S}{S'}=K^2$$

– Dos **polígonos** son **equivalentes** cuando tienen la misma área.

Ej.: Los polígonos de la figura siguiente son semejantes.



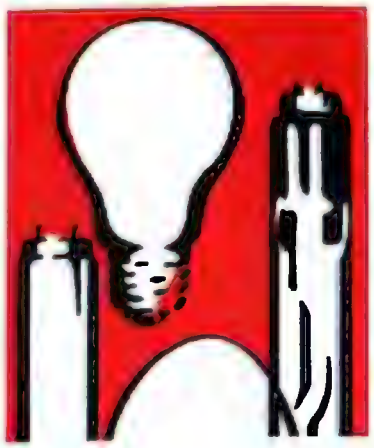
Calcular la razón de semejanza de los dos triángulos y la longitud de los lados que faltan en el triángulo pequeño.

Establecemos la proporcionalidad entre los dos triángulos.

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{x}=\frac{12}{y}=K \Rightarrow K=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$\frac{6}{x}=1{,}5 \Rightarrow x=\frac{6}{1{,}5}=4\ m$$

$$\frac{12}{y}=1{,}5 \Rightarrow y=\frac{12}{1{,}5}=8\ m$$



Thomas Alba Edison fue un sabio americano, gren emante de les mateméticas. Como mérito más destecedo anotamos su tenacidad para vencer dificultades que parecían inauperables. Su ingenio y su conatencia hen dado el progreso y e la civilización mejores prácticas que ya eran conocidas teóricamente pero sin adaptación a la vida real.

El fue quien aplicó a le telegrefía el sistema "dúplex" y "cuádruplex"; él, con su perfeccionamiento del cerbón transmisor y del micrófono, aumentó al máximo les posibilidedes del teléfono. Su invento más laborioso fue la maraville de la lámpare incendescente, que solucionó definitivamente el problema del alumbrado. También dio al mundo el megáfono y el fonógrafo.

En su vida registró más de un millar de patentes industriales.

Este hombre, verdadero mego de la ciencle, es ejemplo de lo que puede el tesón y le constencia asoclados.

Su fame se extendió rápidamente por todo el mundo, creando, asimismo, grandes compañías pare comerclalizar sus productos.

Desde lo alto de la Torre de Madrid, cuya altura es de 100 metros, un niño deja caer una pelota de goma. Cada rebote de la pelota sube a una altura de la décima parte de la altura anterior. Se pregunta: ¿qué recorrido habrá realizado cuando se detenga?

D. total =

$$= 100\left(1 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots\right) =$$

$$= 100\left(1 + 2\,\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}\right) =$$

$$= 100\left(1 + 2\,\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}\right) =$$

$$= 100\left(1 + 2\,\frac{1}{9}\right) = 100\left(1 + \frac{2}{9}\right) =$$

$$= 100\,\frac{11}{9} = \frac{1100}{9} = 122{,}22 \text{ metros}$$

de distancia total recorrida.

En las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas vemos que X tiene dos soluciones: X puede ser con signo + o signo −. Vamos, al menos, a intentar explicar esta circunstancia:

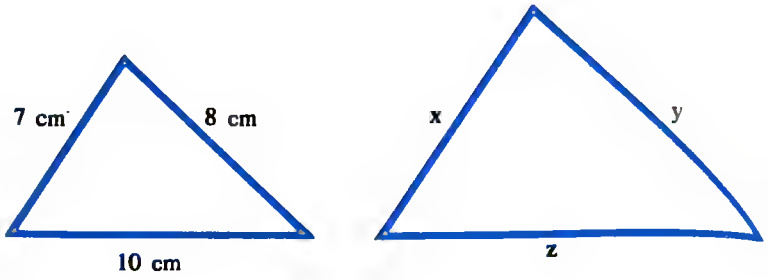
$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si X^2 es igual a 4 tiene por tanto dos soluciones para X, esto es, $X = +2$ y $X = -2$.

Repasando la teoría de los signos vemos que + multiplicado por + da siempre +. Menos multiplicado por menos da + siempre. O lo que es lo mismo, al multiplicarlos den siempre positivo.

Al multiplicar en la segunda solución (−2) (−2) de siempre también 4 positivo, ¿entendido?

Ej.: Los lados de un triángulo miden 7, 8 y 10 cm, respectivamente. Hallar los lados de un triángulo semejante cuyo perímetro es 75 cm.



$P = 7 + 8 + 10 = 25$ cm $\qquad P' = 75$ cm

Estableciendo la condición de proporcionalidad entre los dos triángulos.

$$\frac{7}{x} = \frac{8}{y} = \frac{10}{z} = K = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 21 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 24 \text{ cm}$$

$$\frac{10}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 30 \text{ cm}$$

Ej.: Si la razón de semejanza de dos polígonos semejantes es de 4/5, ¿cuánto vale la razón de semejanza de sus perímetros? ¿Y cuánto la razón de semejanza de sus áreas?

$$K = 4/5$$

razón semejanza de perímetros: $K = 4/5$

razón semejanza de áreas $= K^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 16/25$

Ej.: La razón de semejanza de dos polígonos es 2/7 y el perímetro del primero es 38 m. ¿Cuánto mide el perímetro del segundo?

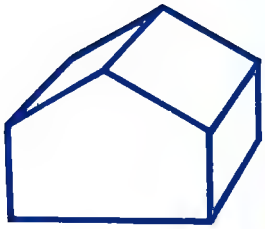
$$\frac{P}{P'} = K \Rightarrow \frac{38}{P'} = \frac{2}{7} \Rightarrow P = \frac{38 \cdot 7}{2} = 133 \text{ m}$$

Ej.: Un plano de un terreno se ha hecho a escala 1/625. Averiguar la longitud que tendrá la fachada de una casa que en el dibujo mide 25 cm.

Cualquier escala, en este caso 1/625, indica que una unidad en el plano equivale a 625 unidades en la realidad:

EN LA REALIDAD

EN EL PLANO



25 cm

x cm

ESCALA

1 cm

625 cm

$$\frac{1}{625}=\frac{25}{x}\Rightarrow x=25\cdot 625=15.625\text{ cm}=156{,}25\text{ m}$$

Ej.: Calcular el perímetro de un triángulo semejante a uno dado cuyos lados miden 4, 6 y 8 m. Sabiendo que la razón de semejanza (de los desconocidos a los conocidos) es 3/2.

$$P' = 4 + 6 + 8 = 18\text{ m}$$

$$\frac{P}{P'}=\frac{3}{2}\rightarrow\frac{P}{18}=\frac{3}{2}\rightarrow P=\frac{18\cdot 3}{2}=27\text{ m}$$

Ej.: La suma de las áreas de dos cuadrados es 170 cm^2 y la suma de sus perímetros es de 72 cm. Hallar el valor de la razón de semejanza de ambos.

Plantearemos un sistema de ecuaciones, llamando L y l respectivamente a los lados de los cuadrados.

$$\left.\begin{matrix}L^2+l^2=170\\4L+4l=72\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}L^2+l^2=170\\L+l=18\end{matrix}\right\}\qquad L=18-l$$

$$(18-l)^2+l^2=170;\ 324+l^2-36l+l^2=170$$

$$2l^2-36l+154=0;\ l^2-18l+77=0$$

$$l=\frac{18\pm\sqrt{324-308}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{18\pm 4}{2}=\begin{cases}11\rightarrow L=7\\7\rightarrow L=11\end{cases}$$

Así que la razón de semejanza de ambos, expresada del cuadrado pequeño al grande, es:

$$K=\frac{7}{11}$$

En un pueblecito de la costa había dos peluquerías. Yo tenía que cortarme el pelo y fui a elegirlas. Una de ellas se caracterizaba por lo sucia que se hallebe, incluso el peluquero estaba sin afaitar, sin pelar y con une bata llena de suciedad. Despuéa de asomarme a la ventana y observarlo me fui a la otra peluquería, la cual era todo lo contrario que la anterior: el peluquero afeitado recientemente, con un corte de pelo muy bonito y una bata blanca sin manchas. Inmediatamente vi asto desde la ventane, me di media vuelta, y me fui a la que estaba SUCIA. ¿Por qué tomé esta decisión?

SOLUCION: Muy sencillo; yo deseaba cortarme el pelo, y como un peluquero no puede cortarse el pelo e sí mismo, necesariamente tiene que hacérselo otro, no cabe la menor duda de que el peluquero sucio cortaba al pelo el limpio.

Un bolígrafo cueste 10 duros, un lapicero tres duros y una goma de borrar medio duro.

Un librero compró 100 unidades en total, que le costaron 100 duros; de tal manera, que compró el menos uno de cada. ¿Cuántos compró de cada clase?

$10x + 3y + \frac{z}{2} = 100$ duros

$x + y + z = 100$ unidades

Multiplicamos por dos la primera ecuación y tendremos:

$$20x + 6y + z = 200$$
$$x + y + z = 100$$

Restamos la 2.ª de la 1.ª y tendremos:

$$19x + 5y = 100$$
$$y = \frac{100 - 19x}{5} = 20 - \frac{19x}{5} \quad (2)$$

La fracción $\frac{19x}{5}$ tiene que dar un número entero, o sea, tiene que ser entero, ya que x es un bolígrafo entero y no se puede dividir; así pues, x tiene que ser múltiplo de 5. El múltiplo más bajo de 5 es precisamente el mismo 5 y entonces en la ecuación N.° (2) tendremos ya 5 bolígrafos.

$$y = 20 - \frac{19 \times 5}{5} = 20 - 19 = 1$$

y = 1 lapicero

y así: 100 − (5 + 1) = 94 gomas de borrar.

Que son:

5 bolígrafos a	10 duros =	50 duros
1 lapicero a	3 duros =	3 duros
94 gomas de borrar a	$\frac{1}{2}$ duro =	47 duros
		100 duros

6.—ESTUDIO GENERAL DEL TRIANGULO

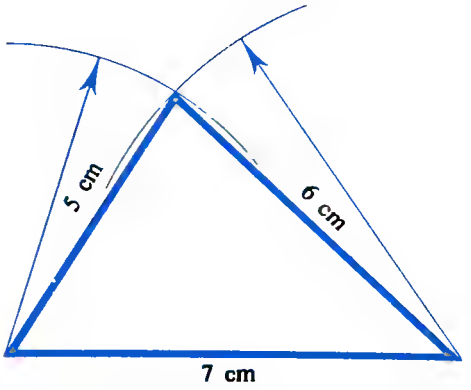
Se entiende por triángulo a un polígono cerrado que consta de seis elementos: 3 lados y 3 ángulos.

Para que un triángulo esté perfectamente definido es necesario que la suma de dos cualquiera de sus lados sea siempre mayor que el lado que queda, haciendo todas las combinaciones posibles.

A.—Construcción geométrica de un triángulo

Se elige uno cualquiera de sus lados como base y con un compás se pincha en un extremo de la base; con una abertura igual a otro de sus lados se traza un arco; en el otro extremo de la base se repite la operación con el lado que queda. La intersección de los dos arcos define el tercer vértice del triángulo junto con los dos extremos de la base.

Ej.: Dibujar un triángulo con los lados siguientes: 5, 6 y 7 cm.



Ej.: Averiguar si los segmentos 5, 6 y 7 cm forman triángulo.

Hacemos todas las combinaciones posibles, a ver si la suma de dos lados cualquiera es mayor que el que queda.

$5 + 6 > 7$

$5 + 7 > 6$ sí forman triángulo

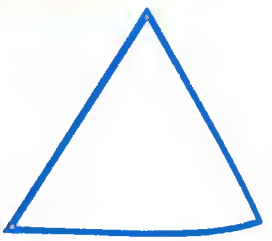
$6 + 7 > 5$

Ej.: Averiguar si los segmentos 2, 6 y 8 forman triángulo.

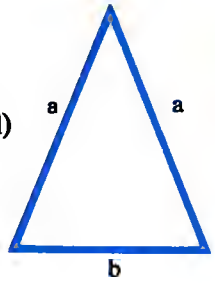
No lo forman, porque $2 + 6 \not> 8$

B.—Clasificación de los triángulos por sus lados

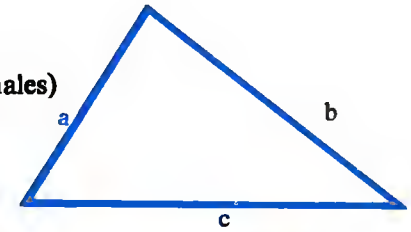
Equilátero
(tiene los tres lados iguales)



Isósceles
(tiene dos lados iguales y el otro desigual)

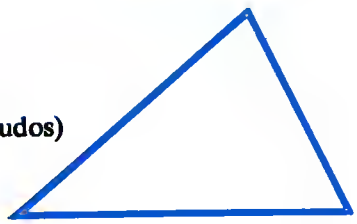


Escaleno
(tiene los tres lados desiguales)

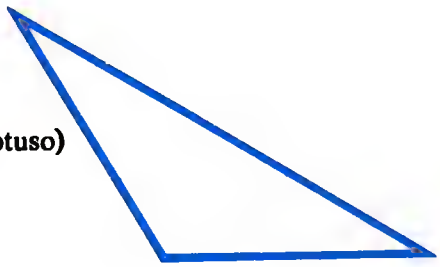


C.—Clasificación de los triángulos por sus ángulos

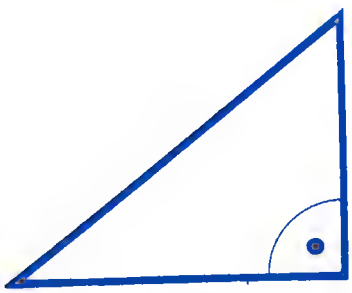
Acutángulo
(tiene todos sus ángulos agudos)



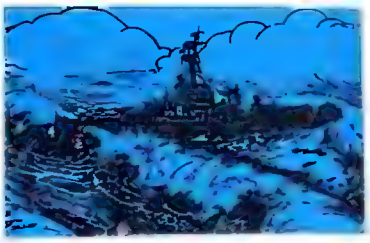
Obtusángulo
(tiene algún ángulo obtuso)



Rectángulo
(tiene un ángulo recto)



NOTA.—Aunque ya se ha estudiado, en general, en el apartado de polígonos obsérvese que la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale siempre 2 rectos ó 180°.



Un entiguo marino, por vueltas que da la vida, se vio en le necesidad de colocarse de guarda nocturno en unos almacenes. Une mañana, cuando el personal entraba al trabajo, vieron al guarda colgado por la cintura e una viga y a unos 3 metros del suelo.

—¡Béjenme y llamen e la policíe, nos han robedo todo el dinero del almacén!

Presentada la policía, no vio nada que le hiciera sospecher de quién serían los ladrones. Sólo sabían que el guarda les había dicho que eran tres y bastante fornidos, los cuales le habían sorprendido y colgado de la viga, y dijo también que dos de ellos tendrían, durante por lo menos una semana, recuerdo de sus puños.

La policía, al cabo de 10 días, se personó por le tarde en los almacenes, antes de cerrar el servicio al público, a detener al guarda. Uno de los policíes, que llevaba el caso se dio cuenta de quién ere el culpable al pasar aquella misma tarde por el muelle del puerto.

El guarda lanzó desde el suelo un cabo o cuerde, con peso en la punta, a la viga. Hizo una lazada hasta que ajustó en le misma, la cuerda sobrante la cortó deshaciéndola, por ejemplo (hay varias soluciones), arrojándola poco a poco al water. Cuando todo esto estaba hecho, volvió, trepó por la cuarda hasta la viga, se agarró a ella y antonces se anudó con tres vualtas an la cintura, y por el mismo procedimiento que usó para subir, lo realizó para bajar y así quedar colgedo.

NOTA: Si no hubiera sido tan minucioso en explicaciones, quizá no lo hubieran descubierto.

Los modernos faros que jalonen las costas de todos los mares ya no tienen ningún parecido con los antiguos que solamente orientaban por medio de una luz y, más remotamente, con una gran hoguera.

Algunos historiadores creen que los primeros faros fueron dedicados a adorar a los dioses del mar, y que en ellos se realizaban sacrificios para aplacarlos cuando se desataban las tormentas.

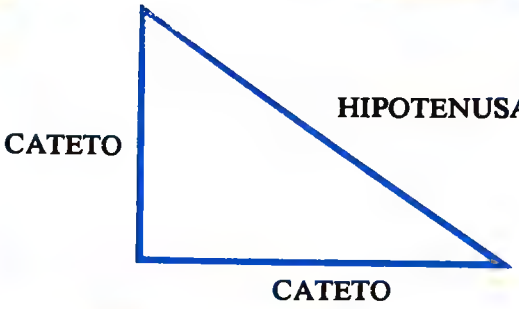
Algunas de estas torres de luz también se usaban como escuelas de navegación. Allí en la tranquilidad de la noche se estudiaba astronomía, se desarrollaba el arte de navegar y también la forma de fortificar y defender las costas. Los guardianes tenían también la misión de avisar la presencia de naves enemigas; usaban para ello grandes caracolas marinas en las que, soplando, se producía un sonido característico que ponía sobreaviso a los que vivían en los pueblos próximos.

La más antigua fue la torre de Pharos, calculada y construida por Sostratus, en Egipto, trescientos años antes de Cristo, y destruida más tarde por un terremoto.

D.–Estudio particular del triángulo rectángulo

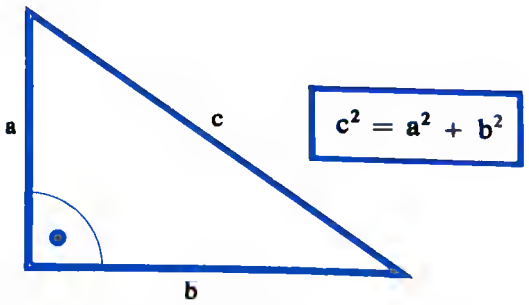
El triángulo rectángulo se puede considerar en geometría como el más importante desde el punto de vista de la cantidad de problemas y detalles que resuelve.

En el triángulo rectángulo, sus lados reciben nombres especiales: A los dos lados que forman el ángulo recto se les llama **catetos** y al tercer lado se le llama **hipotenusa**.

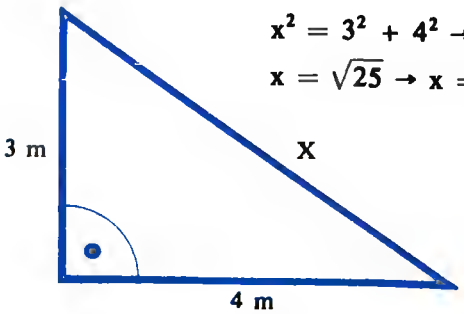


E.–Teorema de Pitágoras

Para un triángulo rectángulo existe una representación gráfica y una representación matemática. La representación gráfica ya se ha expuesto y la representación matemática es precisamente el Teorema de Pitágoras que dice: que la hipotenusa al cuadrado es igual a un cateto al cuadrado más el otro cateto al cuadrado.



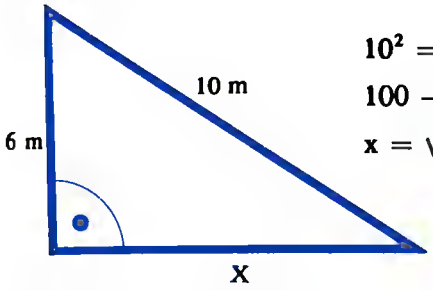
Ej.: Un triángulo rectángulo tiene catetos de 3 m y 4 m. Hallar la hipotenusa.



$x^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow x^2 = 9 + 16 \rightarrow x^2 = 25$

$x = \sqrt{25} \rightarrow x = 5$ m

Ej.: Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 m y la hipotenusa de 10 m. Hallar el otro cateto.

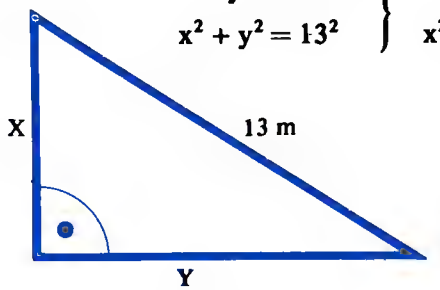


$$10^2 = 6^2 + x^2 \rightarrow 100 = 36 + x^2$$
$$100 - 36 = x^2 \rightarrow 64 = x^2$$
$$x = \sqrt{64} \rightarrow x = 8 \text{ m}$$

Ej.: El perímetro de un triángulo rectángulo es 20 m y la hipotenusa tiene 13 m. Hallar los catetos.

Plantearemos un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 13 = 20 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{array}\right\} \quad x = 7 - y$$



$$(7 - y)^2 + y^2 = 169 \rightarrow 49 + y^2 - 14y + y^2 = 169$$

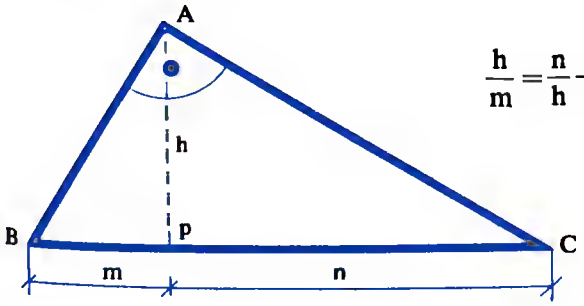
$$2y^2 - 14y - 120 = 0 \rightarrow y^2 - 7y - 60 = 0$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{7 \pm 17}{2} = \begin{cases} 12 \rightarrow x = -5 \text{ (no vale)} \\ 5 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La primera solución no vale, porque no es posible una solución negativa. Luego la solución para los dos catetos es 2 m y 5 m.

F.—Teorema de la altura

En todo triángulo rectángulo la altura corresponde al ángulo recto, es media proporcional entre los segmentos en que divide a la hipotenusa.

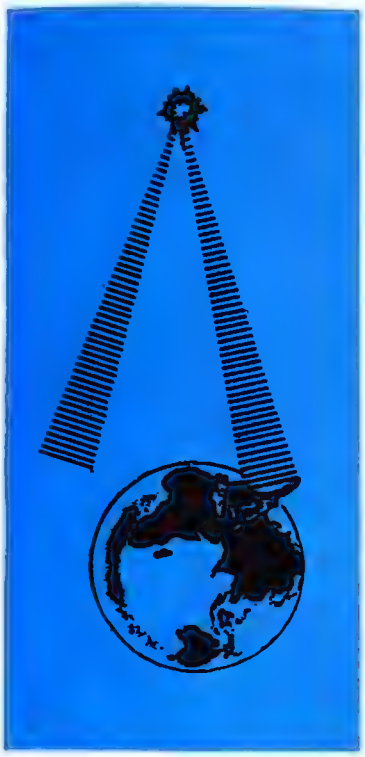


$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

En el siglo XVII el ingeniero Henry Vinstanley decidió construir un faro en unos peligrosos rompientes. Calculó cuidadosamente un edificio, y cuando lo construyeron se comprobó que durante las tormentas de invierno las olas se elevaban a tanta altura que tapaban la luz a la vista de los barcos en peligro. El edificio estaba bien calculado pero tenía un aspecto muy frágil. Con este motivo se desató une fuerte polémica entre los entendidos: unos estaban convencidos qua sería arrasado por las tormentas y el ingeniero constructor estaba seguro de su firmeza. Al fin la enorme potencia de las olas arrastró al mar el faro y a sus ocupantes.

A los tres años, otro hombre de grandes cualidades mecánicas construyó otro de madera qua duró 47 años y al fin lo destruyó un incendio. Las autoridades decidieron entonces hacr uno de piedra y lo encargaron a John Smeaton, que era constructor de instrumantos matemáticos.

Comanzó su tarea con gran entusiasmo, no utilizó nada de madara, sólo bloques de granito reforzados con cadanas enterradas an los bloques. Este faro duró 150 años, siendo últimamanta dasmontado y trasladado al museo naval de Plymouth.

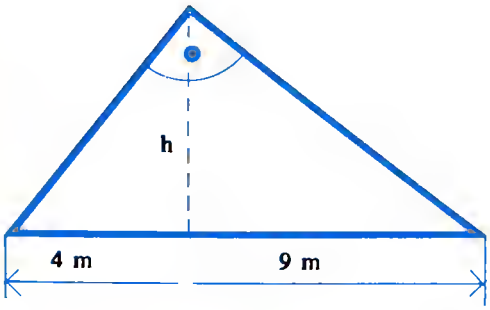


Para determinar con exactitud la distancia de nuestro planeta a las estrellas más próximas se usan procedimientos basados en la trigonometría, mediante observaciones que se realizan con seis meses de intervalo. En este tiempo la Tierra ha recorrido la mitad de su órbita, y la distancia entre sus dos posiciones en el espacio es el doble de la distancia de la Tierra al Sol (llamada unidad astronómica). Esta distancia es la base de un triángulo del que las observaciones proporcionan los ángulos adyacentes. El ángulo opuesto a ella (paralelaje) tiene su vértice en la estrella observada. Su valor no llega nunca a 1"; el paralelaje de 1", se denomina "parsec" y representa una distancia de 206.265 unidades astronómicas, o sea, 3,26 años luz.

Desde la más remota antigüedad los astrónomos agruparon las estrellas, dando a cada grupo un nombre generalmente mitológico. Así, la Osa Mayor y Menor y la Estrella Polar sirvieron al hombre de referencia para orientarse tanto en tierra como en mar.

Obsérvese que los triángulos $\widehat{ABP}$ y $\widehat{ACP}$ son semejantes por tener sus tres ángulos iguales, y, por lo tanto, se puede establecer proporcionalidad entre sus lados.

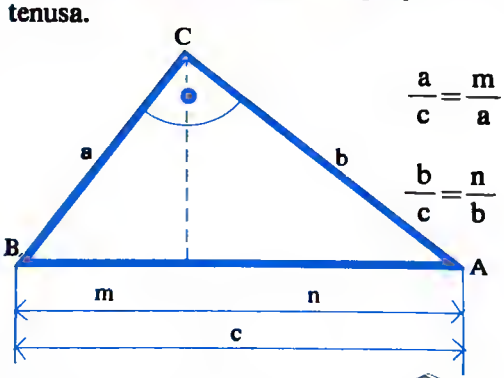
Ej.: En un triángulo rectángulo los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa son de 4 m y 9 m. Calcular la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa.



$$h^2 = 4 \cdot 9 \rightarrow h^2 = 36 \rightarrow h = \sqrt{36} \rightarrow h = 6 \text{ m}$$

G.—Teorema del cateto

En cualquier triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.



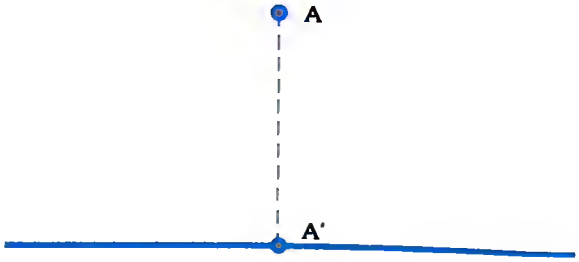
$$\frac{a}{c} = \frac{m}{a} \rightarrow a^2 = m \cdot c$$

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{b} \rightarrow b^2 = n \cdot c$$

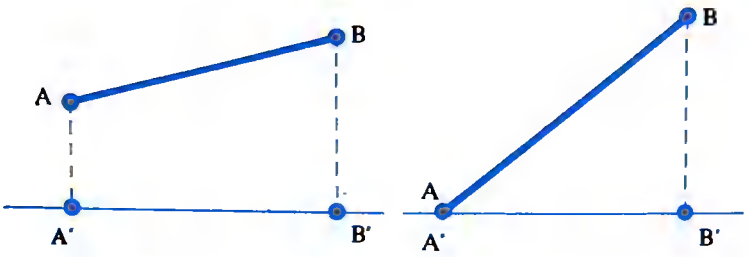
Obsérvese que los triángulos $\widehat{BCP}$ y $\widehat{ACP}$ son semejantes por tener sus tres ángulos iguales y, por lo tanto, se puede establecer proporcionalidad entre sus lados.

NOTA.—Proyecciones y simetrías.

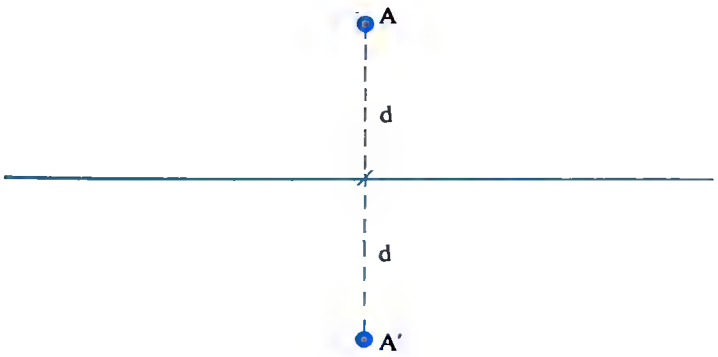
Proyección de un punto sobre una recta es la perpendicular trazado por el punto a la recta.



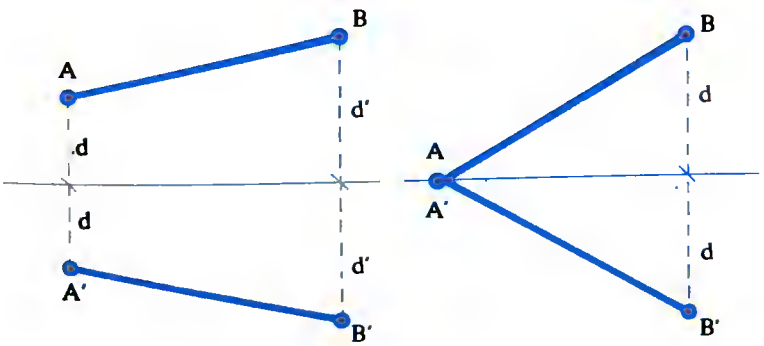
Proyección de un segmento sobre una recta es el segmento comprendido en la recta por los puntos extremos del segmento dado.



— Simétricos de un punto respecto a una recta que hace las veces de eje es la posición igual del punto al otro lado del eje.



— Simétrico de un segmento respecto a una recta o eje es la posición igual del segmento al otro lado del eje.



La energía solar, a le que debemos el que sea factible vivir en la Tierra, se produce por la transformación del hidrógeno en helio. El ritmo de esta transformación puede mantenerse durante decenas de miles de millones de años.

El Sol constituye el centro de nuestro planeta, y tiene un movimiento de rotación en torno a su eje que completa en 25 días, 7 horas y 37 minutos, y otro de traslación en torno al núcleo central de nuestra galaxia, en el que emplea 200 millones de años.

Se calcula en 4.000 millones de años la edad probable como estrella independiente.

Cada once años en su capa superior se inicia una etapa de actividad en la que emite protuberancias y fulguraciones.

Las protuberancias se producen por explosiones equivalentes a millones de bombas H.

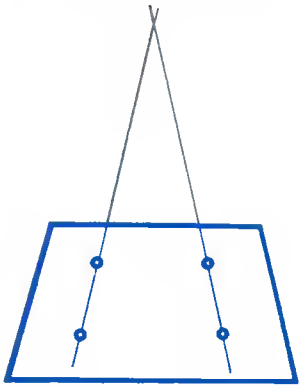
Las fulguraciones tienen brillo muy intenso, duran unos 15 minutos con temperaturas de 10.000° C.

La capa exterior del Sol o corona se extiende hasta nuestro planeta. Esta corona tiene en las capas próximas a la cromosfera temperaturas de 1.000.000° C.

La distancia que lo separa de la Tierra es de 149.505.000 Km, tardando en llegarnos su luz 9 minutos aproximadamente.

Solución al problema de unión de los cuatro puntos por medio de dos rectas da la página 403.

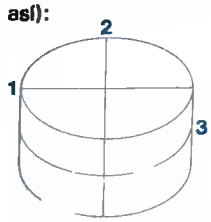
Ver dibujo a continuación.



NOTA: Lo que os ha confundido es que los cuetro puntos están recuadrados, pero yo no he dicho en ningún momento que las líneas de unión se salieran del recuadro.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL BIZCOCHO DE LA PAGINA 414.

Primero se cortaba el bizcocho por la mitad de la altura, o sea, un corte paralelo a la mesa, para mejor comprensión, y después dos cortes para dividir al bizcocho en cuatro partes. (Estos dos cortes perpendiculares e la mesa, así):

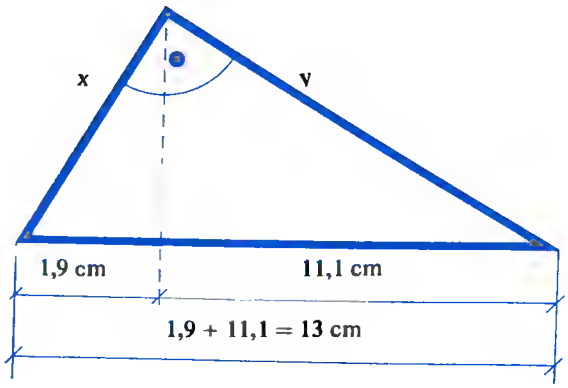


Son en total tres cortes, ¿no?

SOLUCION AL PROBLEMA DEL AUTOCAR DE LA PAGINA 414.

Te he estado dando vualtas s cosas que ni a tí ni a mí nos interesan. Es como si al final te digo también que mañana as jueves y luego te hago la pregunta, ¿qué edad tiene el conductor? ¿No te he dicho al principio que tú eres el conductor del eutobús? Pues entonces tendrá tu edad.

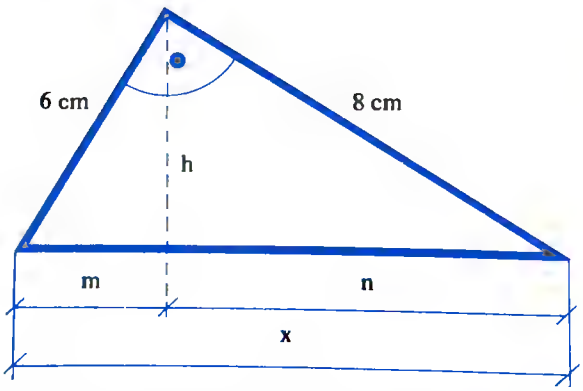
Ej.: Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo miden 1,9 cm y 11,1 cm. Calcular las longitudes de los catetos.



$$x^2 = 13 \cdot 1{,}9 \rightarrow x^2 = 24{,}7 \rightarrow x = \sqrt{24{,}7} \simeq 4{,}96 \text{ cm}$$

$$y^2 = 13 \cdot 11{,}1 \rightarrow y^2 = 144{,}3 \rightarrow y = \sqrt{144{,}3} \simeq 12{,}01 \text{ cm}$$

Ej.: Siendo 6 cm y 8 cm los catetos de un triángulo rectángulo, obtener la hipotenusa, las proyecciones de los catetos sobre ella y la altura.



Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la hipotenusa x.

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 36 + 64 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema del cateto, a ambos, obtenemos las proyecciones de éstos sobre la hipotenusa.

$$6^2 = 10 \cdot m \rightarrow 36 = 10m \rightarrow m = \frac{36}{10} \rightarrow m = 3{,}6 \text{ cm}$$

$$8^2 = 10 \cdot n \rightarrow 64 = 10n \rightarrow n = \frac{64}{10} \rightarrow n = 6{,}4 \text{ cm}$$

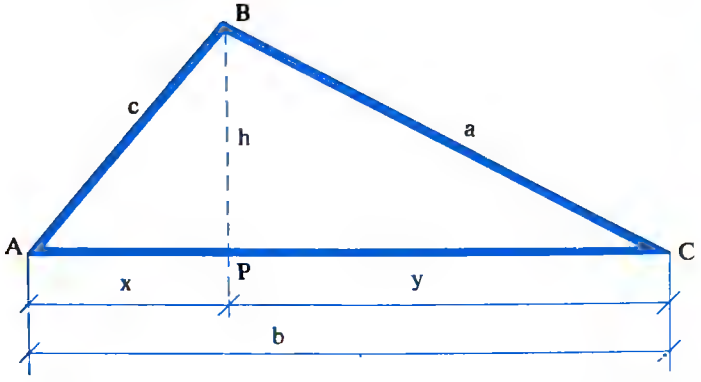
Aplicando el teorema de la altura, obtenemos la altura correspondiente a la hipotenusa.

$$h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 \rightarrow h^2 = 23{,}04 \rightarrow h = \sqrt{23{,}04} \rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

H.—Generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos

— En cualquier triángulo **el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

En el triángulo de la figura.



Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos $\widehat{ABP}$ y $\widehat{BCP}$:

$$a^2 = h^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$c^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \qquad (2)$$

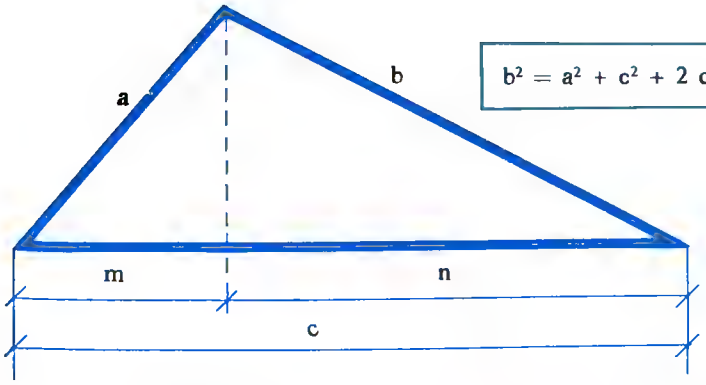
Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$a^2 = c^2 - x^2 + y^2 \qquad (y = b - x)$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + (b - x)^2$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$



$b^2 = a^2 + c^2 + 2$ cm

La aplicación del teorema es extensiva a cualquier lado del triángulo.

— En cualquier triángulo **el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso** es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Hasta hace poco tiempo los psicólogos especializedos en el principio de la vida creían que los niños heredaban una inteligencia fija que se desarrollabe e un ritmo siempre igual determinado por las sucesivas edades. No se daba gran importencia a los conocimientos que se les proporcionaba en la edad escolar. Hoy los investigadores comprenden que no es fácil de prever el desarrollo mental estando influenciado en gran manera por su entorno; así se han visto casos de niños que a los 5 años no sabían andar porque nadie se había tomado la molestia de enseñarles.

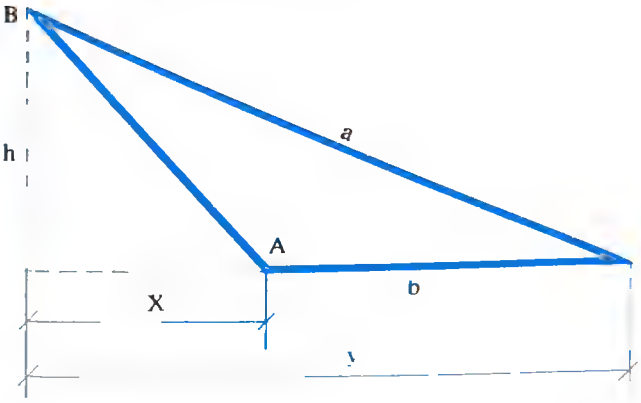
En medio del viejo debate entre los que opinan que el talento se hereda y los que afirman que se adquiere, algunos investigadores sostienen que el medio de desarrollo es la clave de la actitud para aprender y ven un gran factor de iniciación en los juguetes y pasatiempos didácticos que proporcionan al niño un medio de aprendizaje creador y placentero en sus años preescolares.

El niño es una máquina de digerir novedades que devora y se entusiasma con cualquier cambio. Impulsándole a nuevas experiencias se le mantiene en movimiento, haciendo que encuentre placer en el aprendizaje.

Colón llevó semillas de naranjas dulces y limones cuando se embarcó en 1493 con el propósito de establecer una colonia en Hispaniola. El naranjo floreció perfectamente, y más adelante lo llevó a Méjico y al resto de la América Central. En la Florida se plantaron en gran cantidad hacia el año 1565, cuando se colonizó San Agustín. Hoy este Estado va a la cabeza de la producción mundial, seguido muy de cerca por el Levante español. Desde aquí se extendieron por todas las zonas templadas.

Los naranjos están clasificados en tres grupos principales. En las frutas de estas especies, sus zumos son muy ricos en vitamina C. Esta propiedad solucionó a todos los marineros el grave problema del escorbuto, que padecían por la falta de alimentos frescos, ya que las traveslas duraban meses e incluso años alimentándose de comidas secas muy pobres en vitamina C. Las mandarinas, que en China y Japón sobrepasan en popularidad a la naranja, no se conocieron en Europa hasta el año 1800. El limón es oriundo de Burma, al este del Himalaya, y también de la India Oriental.

En el triángulo de la figura



Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos $\widehat{ABP}$ y $\widehat{BCP}$:

$$a^2 = h^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$c^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \qquad (2)$$

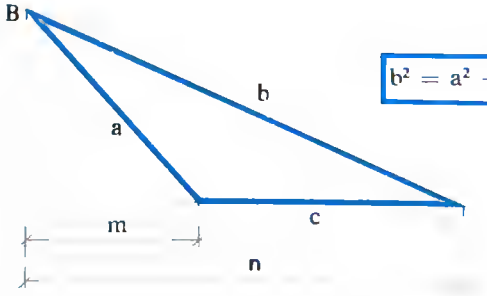
Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$a^2 = c^2 - x^2 + y^2 \; (y = b + x)$$

$$a^2 = c^2 - x^2 + (b + x)^2$$

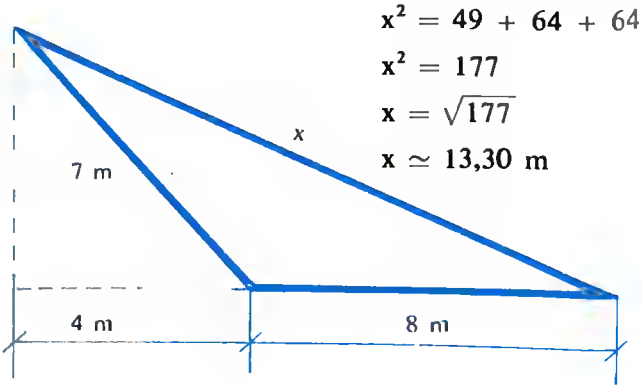
$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + x^2 + 2bx$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$$



$b^2 = a^2 + c^2 + 2\ cm$

Ej.: En el triángulo de la figura, averiguar la longitud del lado desconocido.



$$x^2 = 7^2 + 8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 4$$

$$x^2 = 49 + 64 + 64$$

$$x^2 = 177$$

$$x = \sqrt{177}$$

$$x \simeq 13{,}30 \text{ m}$$

7.–FORMA DE UN TRIANGULO

En cualquier triángulo, según que un ángulo sea agudo, recto u obtuso, el cuadrado del lado opuesto es respectivamente menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Ej.: Averiguar si un triángulo de lados 15 cm, 17 cm y 19 cm es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

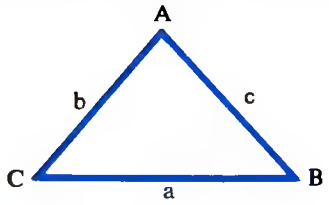
$15^2 < 17^2 + 19^2$

$17^2 < 15^2 + 19^2$

$19^2 < 15^2 + 17^2$

El triángulo es acutángulo por tener todos los ángulos agudos.

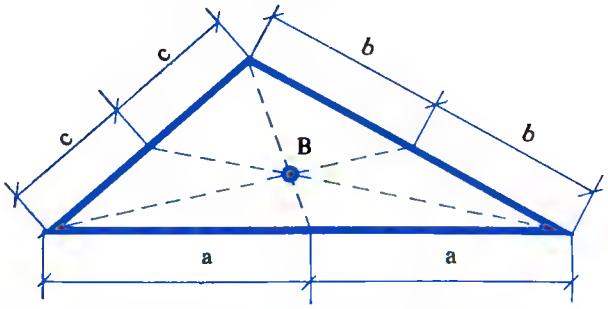
NOTA.–Los vértices de los triángulos se suelen nombrar con letras mayúsculas, según las letras del abecedario, en sentido de derechas o de izquierdas. Los lados opuestos a cada ángulo suelen llevar la misma letra que el ángulo pero minúscula.



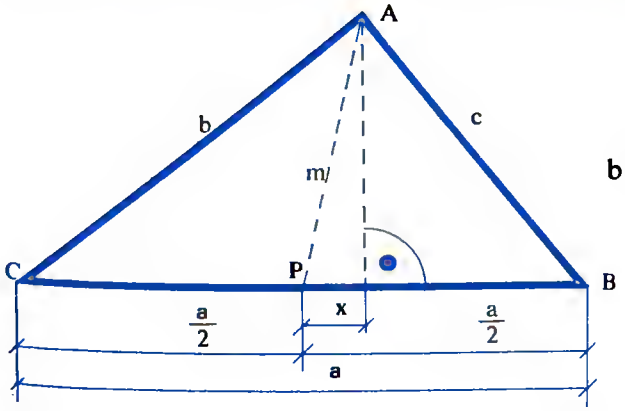
8.–PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE UN TRIANGULO

A.–Baricentro

Es el punto de intersección de las medianas de un triángulo, entendiendo por **mediana** a la recta que parte de un vértice para ir al punto medio del lado opuesto.



Supongamos un triángulo ABC como el de la figura:



$b > c$

Como resto de los océenos que cubrían en la Era Secundaria grandes zonas de nuestre península, se puede citar la denominada Ciudad Encantada, situada a 26 Km de Cuenca y que comprende una superficie de unos 20 Km^2. En ella la acción disolvente del anhídrido carbónico del agua procedente de las lluvias y de las nieves moldearon las piedras calizas que emergieron al retirarse las agues; por otra parte, los bruscos cambios térmicos —está situada a una altitud de 1.420 m—, la erosión y la acción geológica de los seres vivos —hongos, líquenes, algas, etc.— han sido conjuntamente los artífices de esta singular topografía que desborda nuestra imaginación.

En un recorrido de unos tres kilómetros se pueden ver rocas con formas muy curiosas, como el tormo alto, la escuadra de barcos, el mar de piedra, el frutero, el elefante, etc.

Toda la comarca aparece cubierta con espesos bosques de pinos, lo cual hece a esta zona una de las más bellas y digna de ser visitada.

Cicerón fue un hombre feo, con poca voluntad, y sin un telento brillantísimo, pero su nombre ha pasado a la historia y es recordado en ella porque fue un gran orador.

Lo mismo sucedió con Demóstenes.

La antigüedad concedía máxima importancia al arte de la oratoria, y los jóvenes atenienses y romanos pasaban años aprendiendo y perfeccionando este arte cuya posesión les abría las puertas de los más altos cargos.

Sócrates fue el inventor de un sistema de conversación que ha pasado a la posteridad con el nombre de "Método Socrático". Mediante hábiles preguntas seguidas de las contestaciones a que obligaba a sus oyentes, Sócrates conducía a éste a donde él quería, y le obligaba a unas afirmaciones a las cuales su auditor había llegado sin muchas ganas.

Este sistema es muy eficaz, pero es muy irritante. Sócrates se creó con él tantos enemigos en toda Atenas que al final fue obligado a tomar la cicuta.

Aplicando la generalización del teorema de Pitágoras a los triángulos $\widehat{ACP}$ y $\widehat{ABP}$:

$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\frac{a}{2}x \rightarrow b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} + ax$$

$$c^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{a}{2}x \rightarrow \underline{c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - ax}$$

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\frac{a^2}{4} \rightarrow b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

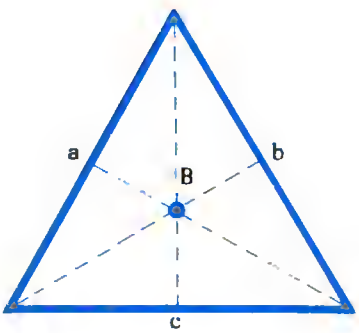
y operando en la expresión: $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$ se obtiene:

$$2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2 \rightarrow m^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$m = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}} \rightarrow m = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

Procediendo de igual forma se obtiene la longitud correspondiente a las medianas de los restantes lados.

La longitud de estas medianas se obtiene pues mediante la aplicación de las siguientes fórmulas:



$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2}$$

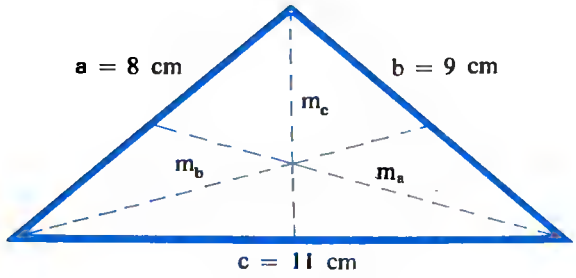
$$m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

El punto baricentro determina en cada mediana dos segmentos, de tal forma que la longitud del segmento de mediana que está más próximo al vértice equivale a los $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana entera y el segmento de mediana que está más próximo al lado equivale a $\frac{1}{3}$ de la longitud de la mediana entera.

Es decir, que el punto baricentro divide a cada mediana en dos trozos, uno de los cuales es doble que el otro.

Ej.: Calcular las medianas de un triángulo cuyos lados miden 8 cm, 9 cm y 11 cm.

Aplicando las fórmulas anteriores obtenemos las longitudes de las medianas.



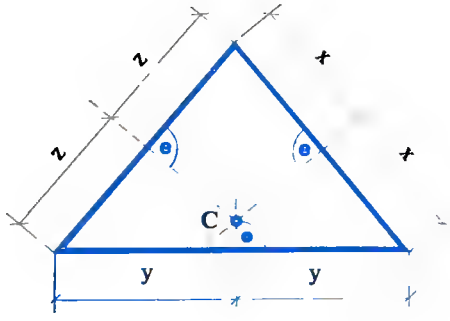
$$m_a = \frac{\sqrt{2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 11^2 - 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{162 + 242 - 64}}{2} = \frac{\sqrt{340}}{2} = \frac{2\sqrt{85}}{2} = \sqrt{85} \text{ cm}$$

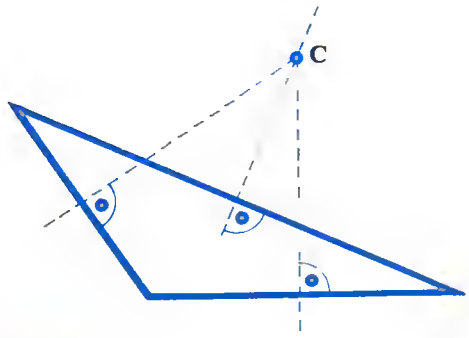
$$m_b = \frac{\sqrt{2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 8^2 - 9^2}}{2} = \frac{\sqrt{242 + 128 - 81}}{2} = \frac{\sqrt{289}}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5 \text{ cm}$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 9^2 - 11^2}}{2} = \frac{\sqrt{128 + 162 - 121}}{2} = \frac{\sqrt{169}}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \text{ cm}$$

B.—Circuncentro

Es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo entendiendo por **mediatriz** a la recta que es perpendicular al lado en su punto medio.





C.—Ortocentro

Es el punto de intersección de las alturas de un triángulo, entendiéndose por **altura** a la recta que parte de un vértice para ser perpendicular al lado opuesto.

El pulgón de la filoxera, originario del este de América, transportado de una forma accidentel a Europa hace más de cien eños, casi acabó con todas les vides de este continente.

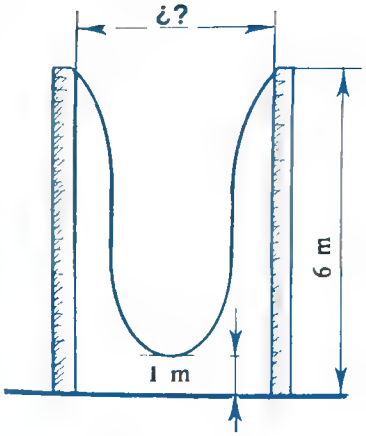
La uva, cultivada desde le más remota antigüedad, se cita en casi todas las referencias escritas de textos griegos y romanos e incluso se encontraron restos en antiqulsimas tumbas egipcias y en palafitos de la Edad del Bronce. En América existían antes de su descubrimiento vides nativas que, si no alcanzaban la finura y calidad de las clases europeas escogidas, tenían una reciedumbre y dureza que las hacía resistentes a las plagas de hongos e insectos. Los españoles establecieron en Nuevo Méjico, en 1598, una colonia donde iniciaron el cultivo de esta planta.

La planta americana resistente a la filoxera fue trasplantada a Europa, salvando, por medio de los oportunos cruces, la riqueza vinícola que tanto prestigio ha dado a muchas regiones de este continente.

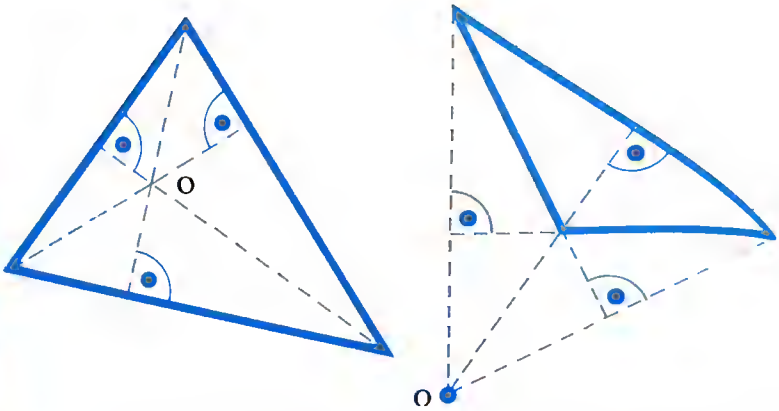
PROBLEMA DEL COLUMPIO

Tenemos dos postes verticales de 6 metros de altura cada uno.

El extremo de cada cuerda está perfectamente clavado en los extremos superiores de cada poste. La cuerda mide exactamente 10 metros de longitud, y queremos que ásta cuelgue a 1 metro del suelo, para hacernos un columpio. Se pregunta: ¿a qué distancia esterán entre sí ambos postes?

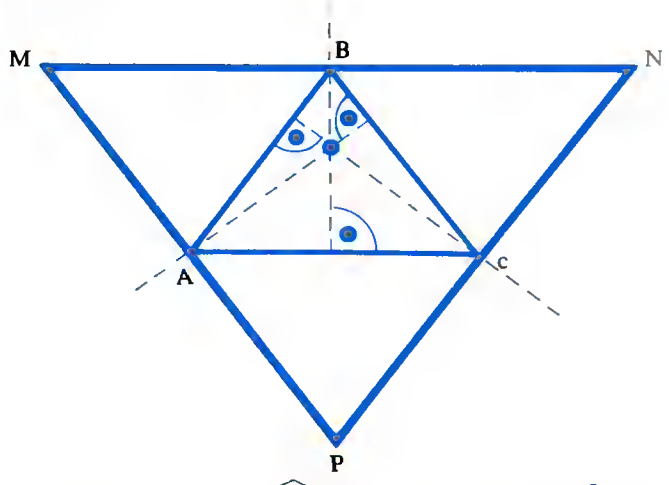


LA SOLUCION EN PAGINA 464.



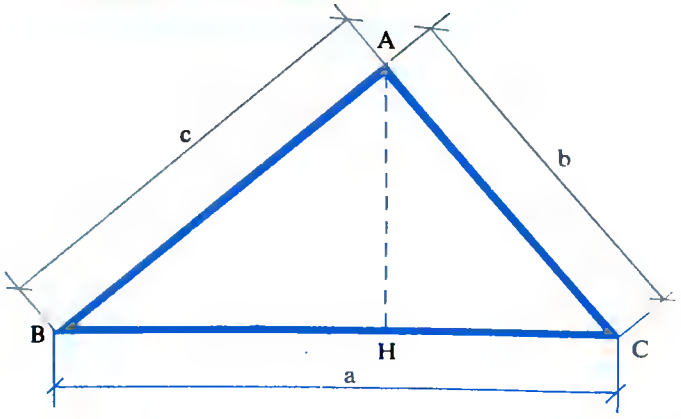
Entre el ortocentro y el circuncentro existe una relación curiosa:

Si dibujamos un triángulo y además dibujamos el triángulo circunscrito al primero y que tengan ambos sus lados respectivamente paralelos, se da la circunstancia de que el punto ortocentro del triángulo interior coincide con el punto circuncentro del triángulo exterior.



Circuncentro de $\widehat{MNP}$ = Ortocentro de $\widehat{ABC}$

— Cálculo de las alturas de un triángulo.



$h_a^2 = c^2 - \overline{BH}^2$ (Teorema de Pitágoras en el triángulo $\widehat{ABH}$)

$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\overline{BH}$ (Teorema de Pitágoras generalizado en el triángulo $\widehat{ABC}$)

Dejando $\overline{BH}$ de la segunda igualdad y sustituyéndolo en la segunda igualdad, obtenemos:

$$\overline{BH} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \rightarrow h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$h_a^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{[2ac + (a^2 + c^2 - b^2)]\,[2ac - (a^2 + c^2 - b^2)]}{4a^2} =$$

$$= \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)\,(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2]\,[b^2 - (a - c)^2]}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a + c) + b]\,[(a + c) - b]\,[b + (a - c)]\,[b - (a - c)]}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a + b + c)\,(a - b + c)\,(a + b - c)\,(-a + b + c)}{4a^2}$$

El palacio del Marqués de Dos Aguas, ejemplo muy interesante del arte churrigueresco español, tiene alojado en su interior el Museo Nacional de Cerámica.

La región valenciane siempre ha sido importantísima en el arte del azulejo y del mosaico. También destacaron los talleres musulmanes de Málaga, Granada y Levante. En esta última zona se originó le cerámica gótica de Paterna, de figuras moradas y verdes, y la de Manises, que tuvo una extraordinaria pujanze hasta el siglo XVIII. Fue en Valencia también donde se inició la producción de ezulejos de inspiración italiana.

En toda Europa se produjeron cerámicas peculiares: Urbino y Faenza en Italia; Sajonie en Alemania; Nantes y Sévres en Francia. En España destaceron Talavera, con una cerámica muy característica, y las fábricas de Alcora, la Cartuja de Sevilla, y, en Madrid, la célebre Real Fábrica del Buen Retiro que Cerlos III trajo de Nápoles.

Las cerámicas de más valor realizadas aquí están hoy expuestas en el Palacio Real y en el de Aranjuez. Funcionó la Real Fábrica del 1765 al 180B.

Cuando sa piansa an la red da comunicaciones qua hoy anvualven nuastro planata, la televisión, la radio y la prensa, que proporcionan constantemante toda clase da información, no nos damos cuenta da qua todo este cúmulo de saber tiena siampre poco más o manos los mismos dastinatarios; mejor dicho, va dedicado a los mismos grupos humanos. Los baneficios de la técnica y da la ciencia siguan pasando junto a cantanaras da millonas da individuos que no puadan aprovacharlos por falta de una instrucción elamantal que los tiene astancados y marginados. Asi, las cifras da los organismos mundiales sitúan an el 51 % da la población mundial al número de analfabetos; pero lo más dramático es qua junto a países an que prácticamanta al analfabatismo astá dastarrado —siampre quedan paqueños grupos enquistados incluso en los palses más cultos—, axistan otros, da los denominados dal tercer mundo, an los que casi todos los ciudadanos padecan esta carencia da instrucción que imposibilita su posterior promoción.

llamando p al semiperímetro del triángulo, es decir, a la mitad del perímetro ($a + b + c = 2p$), se obtiene:

$$a + b + c = 2p$$

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c$$

$$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a$$

y sustituyendo en la última expresión, se obtiene:

$$h_a^2 = \frac{2p\,(2p - 2b)\,(2p - 2c)\,(2p - 2a)}{4a^2}$$

$$h_a = \sqrt{\frac{2p \cdot 2\,(p - b)\,2\,(p - c)\,2\,(p - a)}{4a^2}} =$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

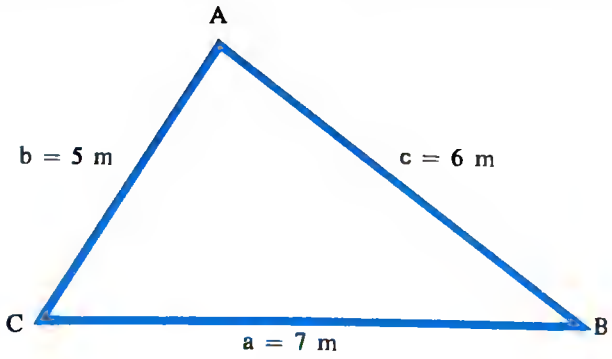
Así que la altura calculada y las restantes del triángulo, se pueden calcular aplicando las fórmulas.

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$$

Ej.: Hallar las alturas del triángulo, de lados 5 m, 6 m y 7 m:



$$h_a = \frac{2}{7}\sqrt{9\,(9 - 7)\,(9 - 5)\,(9 - 6)} = \frac{2}{7}\sqrt{216}\ \text{m}$$

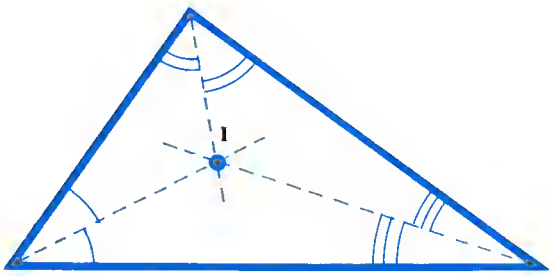
$$h_b = \frac{2}{5}\sqrt{9\,(9 - 7)\,(9 - 5)\,(9 - 6)} = \frac{2}{5}\sqrt{216}\ \text{m}$$

$$h_c = \frac{2}{6}\sqrt{9\,(9 - 7)\,(9 - 5)\,(9 - 6)} = \frac{2}{6}\sqrt{216}\ \text{m}$$

$$p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9$$

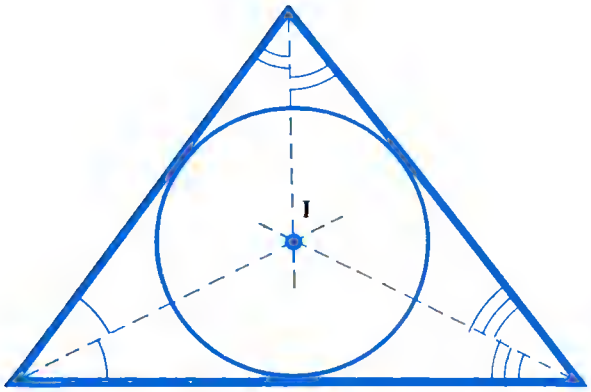
D.–Incentro

Es el punto de intersección de las bisectrices interiores de un triángulo entendiendo por **bisectriz** a la recta que parte de un vértice y divide al ángulo en dos partes iguales.

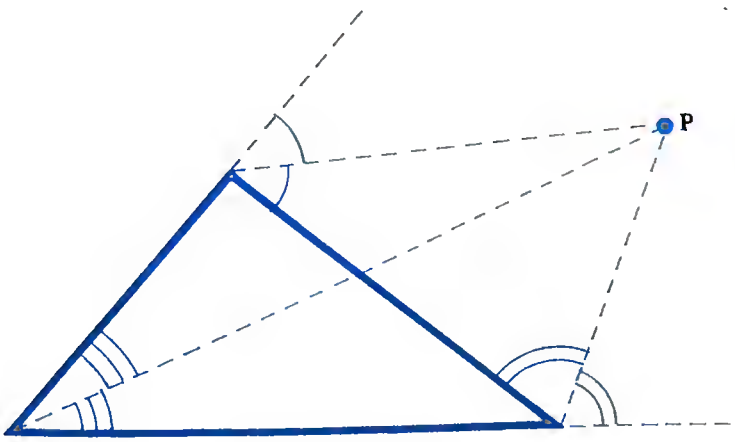


Del punto incentro de un triángulo se pueden obtener las siguientes conclusiones:

– El punto incentro coincide siempre con el centro de la circunferencia inscrita al triángulo en cuestión.



– Las bisectrices exteriores de dos de los ángulos exteriores de un triángulo coinciden en un punto con la bisectriz interior del tercer ángulo.



"Teniendo con qué cubrirnos y qué comer, estamos contentos."

Esta frase la dirigió San Pablo a sus discípulos preocupados por el presente y por el futuro.

Estas palabras encierran en sí una de las fórmulas más efectivas para conseguir la felicidad: reducir nuestras necesidades.

Si nos paráramos a pensar en el enorme montón de cosas que nos sobran, y que sólo tienen valor en función a nuestra vanidad y a nuestro amor propio, veríamos que la felicidad no está en el logro de todos los anhelos, sino en una sabia reducción de deseos y necesidades.

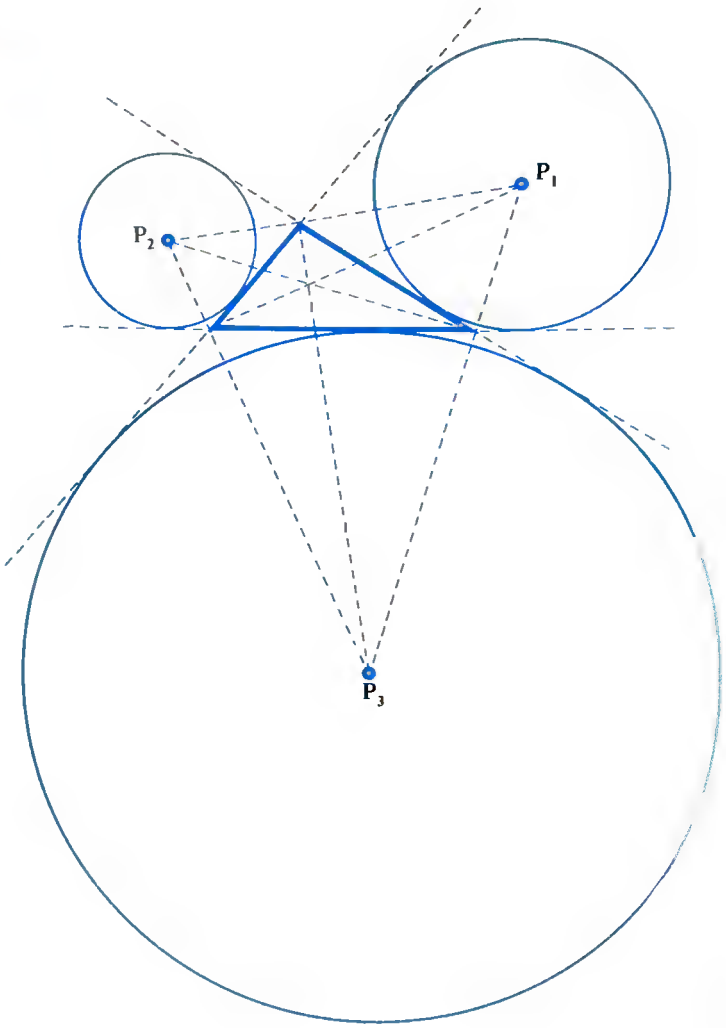
El viejo Diógenes, en la antigua Grecia, conocía esta verdad, y, reduciendo necesidades, llegó a vivir en un tonel. Cuentan que tenía una concha para coger el agua de la fuente y llevarla a la boca; pero cierto día, viendo que esta operación podía hacerla con el hueco de la mano, prescindió de ella para no verse atado a su necesidad.

La matemática es una ciencia que crea adictos; es una especie de droga espiritual; o hemos heredado el "gen" de las matemáticas o no; parece que no existen términos medios.

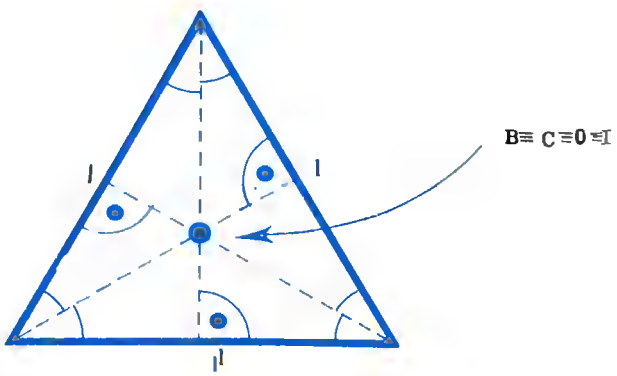
No obstante, todos nos damos cuenta de que en la vida moderna son muy importantes.

El hombre es, desde siempre, el animal que calcula, por contraste con el resto de los otros seres vivos. Ahora no es un animal que calcula con facilidad. Puede afirmarse que desde los primeros tiempos de la vida ya se hicieron cálculos de cosas tales como los ciclos del año con sus diferentes estaciones climáticas; pero estos cálculos y otros muy rudimentarios estuvieron estancados durante casi 2.000 años. Posteriores investigaciones nos han llevado a la matemática actual en la que cualquier joven o adulto puede aprender esta disciplina sin grandes esfuerzos y hasta descubrir una gran afición de la que no tenía conocimiento.

— Los puntos P obtenidos de la forma anterior coinciden con los centros de las circunferencias tangentes a los lados del triángulo.



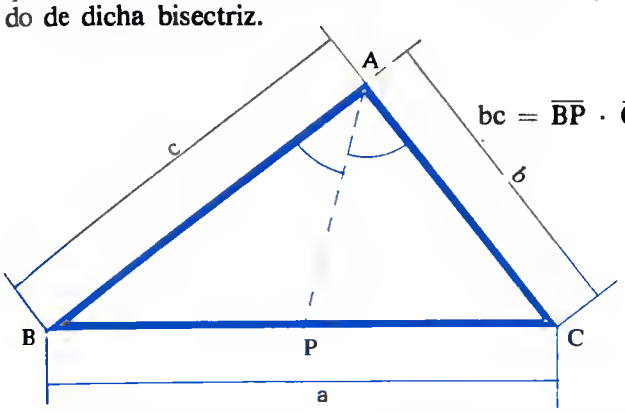
NOTA.—Cuando un triángulo es equilátero, los cuatro puntos notables, baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro se confunden en un mismo punto.



– Cálculo de las bisectrices de un triángulo.

– Bisectrices interiores. Teorema de la bisectriz interior.

Existe en geometría un teorema que dice: el producto de los lados de un triángulo es igual al producto de los dos segmentos que determina la bisectriz interior en el tercer lado, más el cuadrado de dicha bisectriz.



$$bc = \overline{BP} \cdot \overline{CP} + \overline{AP}^2$$

Además la relación de los segmentos en que la bisectriz divide a un lado es proporcional a los otros dos lados del triángulo:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \frac{b}{c}$$

es decir

$$\frac{\overline{CP}}{b} = \frac{\overline{BP}}{c} = \frac{\overline{CP} + \overline{BP}}{b + c} = \frac{a}{b + c}$$

de donde

$$\overline{CP} = \frac{ab}{b + c} \quad \text{y} \quad \overline{BP} = \frac{ac}{b + c}$$

y sustituyendo en $bc = \overline{BP} \cdot \overline{CP} + \overline{AP}^2$, y despejando:

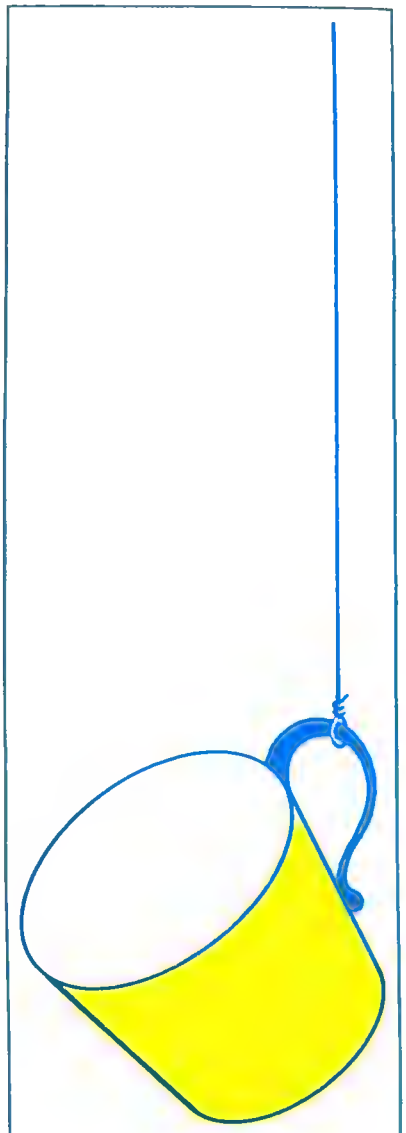
$$\overline{AP}^2 = bc - \overline{BP} \cdot \overline{CP} = bc - \frac{ab}{b + c} \cdot \frac{ac}{b + c} =$$

$$= bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2} = bc \left[1 - \frac{a^2}{(b + c)^2} \right] = bc \frac{(b + c)^2 - a^2}{(b + c)^2} =$$

$$= bc \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{(b + c)^2}$$

$$AP = \sqrt{bc \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{(b + c)^2}} = \sqrt{\frac{bc \cdot 2p \cdot (2p - 2a)}{(b + c)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{bc \cdot 2p \cdot 2(p - a)}{(b + c)^2}} = \frac{2}{b + c} \sqrt{bc \cdot p(p - a)}$$



PROBLEMA DE LA TAZA

Atamos un hilo al asa de una taza. La otra punta la atamos o sujetamos al techo.

¿De qué manera podemos, sin tocar con los dedos, cortar el hilo por el centro con unas tijeras, y que la taza (que no toca en el suelo) siga suspendida del mismo hilo, o sea, que no caiga y no se rompa, por supuesto?

LA SOLUCION EN PAGINA 464.

El colegio del Arte Mayor de la Seda, de Barcelona, es un ejemplo de cómo fueron en la Edad Media los gremios artesanos. Este que comentamos ha sobrevivido al paso de los tiempos. Se fundó allá por el siglo XIII, racibiendo el reconocimiento oficial y las cartas de constitución en 1533 por el Emperador Carlos V. Funcionó con planitud hasta las Cortes de Cádiz en qua sa abolió el sistema gremial, quedando aletargado hasta que tomó un nuevo impulso como asociación y ascuela de los fabricantes de seda. Su sede central, qua se construyó en 1763, es un adificio lleno de nobleza y solemnidad; su salón de actos fue duranta muchos años el mayor da Barcelona, utilizado en fiestas y acontecimientos da gran relieve social. En al salón da los "velars" se venera la imagan da la Virgen da "la Sta. Espina", patrona dal gramio da sadaros.

Como tradición, cada miambro del Colegio ha de aportar su sillón personal a la sala de juntas de acuerdo con un modelo siampre igual y aprobado en su fundación.

La seda es une joya y los modernos tejidos artificiales hacen resaltar todavía más su nobleza y su valor.

Así que en definitiva, las bisectrices interiores se pueden obtener por las fórmulas:

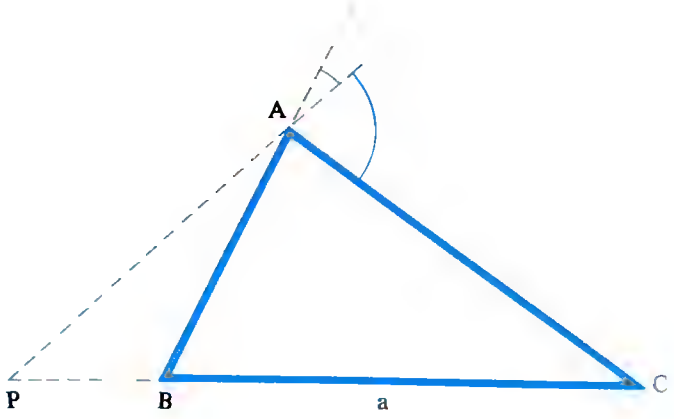
$$B_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}$$

$$B_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)}$$

$$B_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp\,(p-c)}$$

— Bisectrices exteriores. Teorema de la bisectriz exterior.

Existe en geometría un teorema que dice: El producto de los lados de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz exterior determina sobre el tercer lado, menos el cuadrado de dicha bisectriz.



$$bc = \overline{BP'} \cdot \overline{CP'} - \overline{AP'}^2$$

y aplicando la relación de segmentos:

$$\frac{\overline{CP'}}{\overline{BP'}} = \frac{b}{c}$$

y procediendo analógicamente al caso de cálculo de bisectrices interiores, se obtienen las fórmulas que expresan la longitud de las bisectrices exteriores:

$$B'_a = \frac{2}{c-b}\sqrt{bc\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$B'_b = \frac{2}{a-c}\sqrt{ac\,(p-a)\,(p-c)}$$

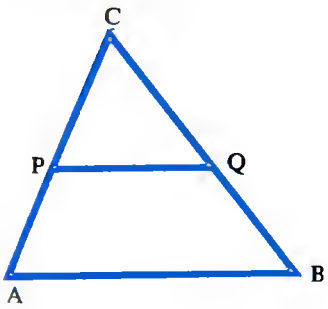
$$B'_c = \frac{2}{a-b}\sqrt{ab\,(p-a)\,(p-b)}$$

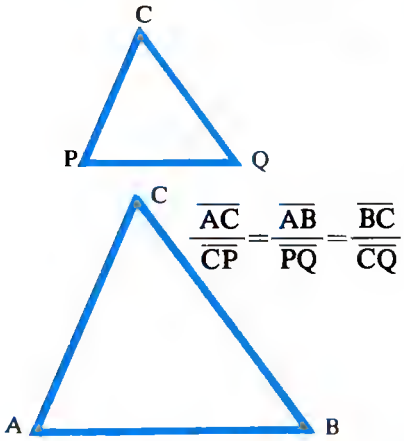
9.–SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Aunque la idea de semejanza ya ha sido tratada de forma general para cualquier polígono, vamos, en cierto modo, a particularizarla para el caso de triángulos, aunque todo lo expuesto anteriormente es válido para el caso de triángulos.

– Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos iguales y consecuentemente sus lados deben de ser proporcionales.

– Cualquier paralela a uno de los lados de un triángulo y que corte a éste, determina con los otros dos lados un triángulo semejante al primero.





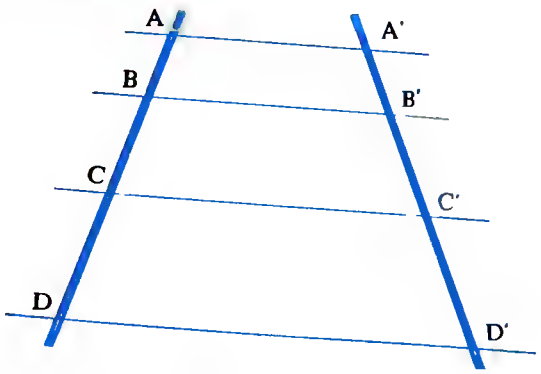
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CQ}}$$

– Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales, ya que el que queda también será igual debido a que en ambos triángulos la suma de sus ángulos es siempre 180°.

– Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido.

10.–TEOREMA DE THALES

Cuando varias rectas paralelas cortan a dos rectas cualesquiera, los segmentos determinados en una de ellas por las paralelas son proporcionales a los segmentos determinados en la otra recta por las mismas paralelas.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = K \text{ (razón de semejanza)}$$

Nuestros abuelos recuerdan todavía el estado de ansiedad y depresión que se apoderó del mundo en el año 1910, cuando todos los astrónomos anunciaron que la cola del cometa Halley entraría en colisión con nuestro planeta, y esto sería el fin de nuestro mundo. Personas con gran fortuna dilapidaron sus bienes; otros que no creían en Dios se convirtieron; y hasta se dio el caso de personas que se suicidaron para así evitarse la horrible muerte por asfixia que los nefastos gases de la cola del cometa les producirían.

Afortunadamente, el 19 de mayo, día previsto, la Tierra fue rozada por la cola del cometa sin que se apreciase ningún fenómeno catastrófico. Estudios posteriores más exactos han demostrado que la cola es una materia tan extraordinariamente tenue, una diezbillonésima parte de la densidad de nuestro aire envolvente, por lo que resulta imposible notar las sustancias venenosas contenidas en aquélla.

Especialmente en la Edad Media, los espíritus se intranquilizaban con cualquier fenómeno en el cielo, considerándolo precursor de terribles acontecimientos y tremendos castigos por pecados cometidos.

Importantísimo es el papel que desempeña la educación.

Esta tiende a que ocultemos nuestros sentimientos, almacenándolos en nuestro interior, y no permitiéndonos, como sería mucho más sano, descargar nuestros impulsos en las personas culpables.

La educación es generalmente un conjunto de prohibiciones que nos afecta desde nuestra niñez. Nos vamos poniendo sin darnos cuenta el yugo de la civilización; así tenemos que ir por la vida sufriendo limitaciones que, en algunos casos, nos llevan a familiarizarnos con enfermedades que sa hacan sentir por unas defectuosas relaciones menta-cuerpo, llevando las preocupaciones mentales a afectar a órganos corporalas.

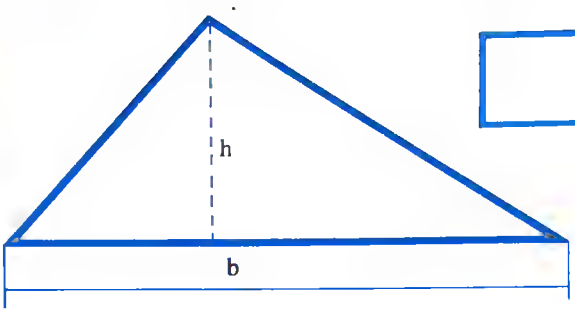
El hombre que eligió una profesión o estudió una carrera, se ve atado a ella como un galeota a su banco, y así nos vemos envueltos en problemas que nos hacen soñar en un afén de libertad.

Ese anhelo pincha nuestras articulaclones, sacude nuestros músculos, allanando el camino a las múltiples enfermedades que se desarrollan como rechazo al encadenamiento a que nos somete la civilización.

El Teorema de Thales corrobora todo lo expuesto en la semejanza de polígonos en general y en la semejanza de triángulos en particular.

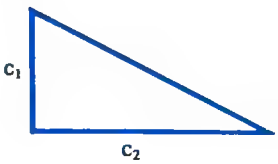
11.—AREA DE UN TRIANGULO

El área o superficie de cualquier triángulo vale la mitad de una de sus bases por su altura correspondiente.



$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

NOTA.—Cuando el triángulo sea rectángulo, también se puede decir que el área es la mitad del producto de sus catetos, ya que si consideramos uno como base, el otro cateto es su altura.

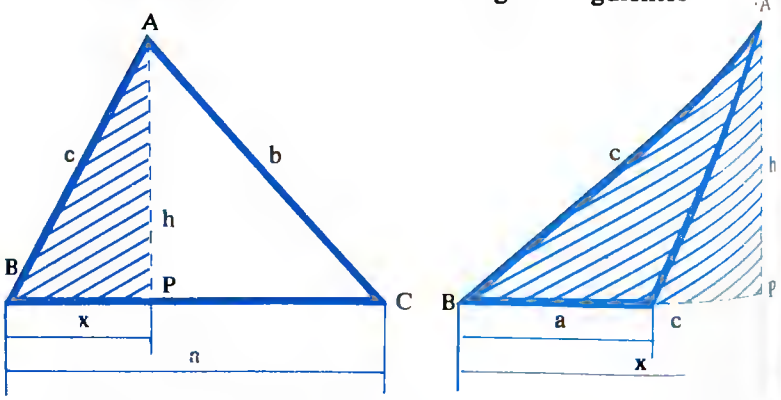


$$S = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

12.—FORMULA DE HERON

Hay veces que tenemos la longitud de los tres lados de un triángulo y necesitamos calcular su superficie. En estos casos, aunque podemos seguir aplicando la fórmula anterior para el cálculo del área, es mucho más cómodo aplicar la fórmula de Herón que expresa el área de un triángulo en función de sus lados.

Supongamos cualquiera de los triángulos siguientes:



Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rayados $\widehat{ABP}$.

$$c^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \qquad (1)$$

Aplicando la generalización del teorema de Pitágoras a los triángulos $\widehat{ABC}$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad (2)$$

Sustituyendo el valor de x en (2) en la expresión (1), se obtiene:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2][b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)]}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2} =$$

$$= \frac{[(a + c + b)(a + c - b)][(b + a - c)(b - a + c)]}{4a^2}$$

Llamando $a + b + c = 2p$ (p = semiperímetro del triángulo), y restando a los dos miembros de la igualdad 2a, 2b y 2c, resulta:

$$a + b + c = 2p \begin{cases} a + b + c - 2a = 2p - 2a \rightarrow b + c - a = \\ = 2(p - a) \\ a + b - 2b = 2p - 2b \rightarrow a + c - b = 2(p - b) \\ a + b + c - 2c = 2p - 2c \rightarrow a + b - c = \\ = 2(p - c) \end{cases}$$

Con lo que definitivamente:

$$h^2 = \frac{2p \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)\, 2(p - a)}{4a^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Las restantes alturas del triángulo se obtendrán de forma análoga. Así que el área del triángulo es:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{2} =$$

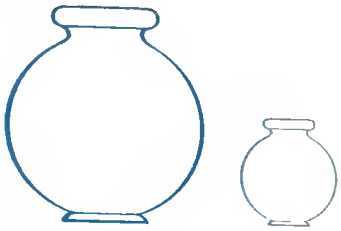
$$= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Los panes siguen identificando a los países con sus formas y sabores peculiares: como los panes de Suiza, con letras y números incrustados; panes dulces de Milán; pan de pescadores de Yugoslavia; panes curvados que parecen herraduras, típicos de los barrios bohemios de París; la alimenticia hogaza que tanto se consumió en España. Pan con un agujero central de Finlandia; pan negro de Groenlandia, que parece un lingote de hierro.

En Holanda se conocen 55 tipos diferentes; en Bélgica, 50 clases; Francia, 40 clases; en España, 30 clases diferentes.

En cambio, en América el pan no tiene una gran tradición. En el Sur se utilizó más la típica tortita, y en el Norte se desarrolló una civilización que nunca estuvo basada en el pan como alimento principal, creando una variedad de pan de molde que no tiene casi valor nutritivo y lleno de sustancias químicas.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LAS VASIJAS DE LA PAGINA 418.

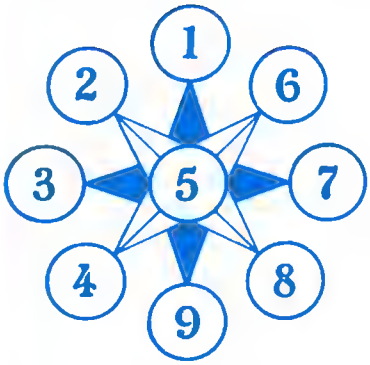


Veamos.

Las dos vasijas son geométricamente semejantes. Al ser la primera ocho veces mayor, todas sus medidas o dimensiones lineales serán doble de la pequeña (doble de alta y doble de ancha).

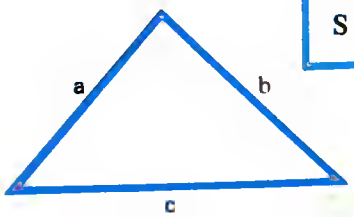
Al ser doble de alta y ancha, su superficie será $2 \times 2 = 4$ veces mayor, ya que la relación entre les superficies de dos cuerpos semejantes es igual a la de los cuadrados de sus medidas lineales. Al tener las paredes el mismo grosor, entonces vemos que la vasija grande pesa **cuatro veces** más que la pequeña.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA ESTRELLA DE LA PAGINA 418.



Ya sabéis que el número clave as al 5 (en el cantro). Después ponemos dal 1 al 9 el número que queramos, y sin repetir ya este número en la parte opuesta no tanemos más que ponerle su complemento a 10. Por ejamplo, el complamento al 10 del 2 será 8; el del 3, el 7, y así sucesivamante.

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$



Donde "p" equivale a la mitad del perímetro del triángulo.

NOTA.—Existen también expresiones que nos proporcionan la altura correspondiente a cada lado del triángulo en función de sus lados.

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Ej.: Hallar el área de un triángulo cuyos lados sean de 26 cm, 25 cm y 17 cm.

Aplicaremos la fórmula de Herón, previo cálculo del semiperímetro del triángulo.

$$p = \frac{26 + 25 + 17}{2} = \frac{68}{2} = 34 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{34\,(34-26)\,(34-25)\,(34-17)} = \sqrt{34 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7} =$$

$$= \sqrt{17.136} \simeq 130{,}9 \text{ m}^2$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE LOS TRES HIJOS DE LA PAGINA 421.

El número 13 se descompone en grupo da tres cifras que raúnan la condición de sumar 13, y de que al multiplicarse nos de 36.

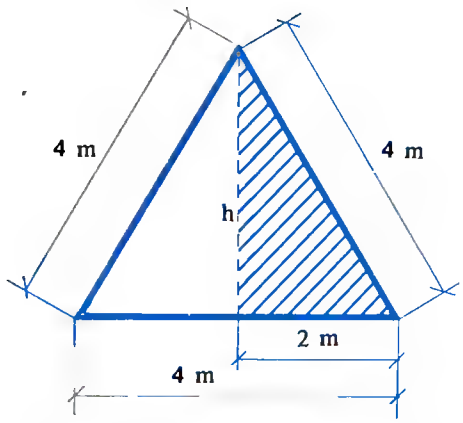
Así:

Sumas	Productos
1 + 1 + 11 = 13	1 · 1 · 11 = 11
1 + 2 + 10 = 13	1 · 2 · 10 = 20
1 + 3 + 9 = 13	1 · 3 · 9 = 27
1 + 4 + 8 = 13	1 · 4 · 8 = 32
1 + 5 + 7 = 13	1 · 5 · 7 = 35
1 + 8 + 6 = 13	1 · 8 · 6 = 38
2 + 2 + 9 = 13	2 · 2 · 9 = 36
2 + 3 + 8 = 13	2 · 3 · 8 = 48
2 + 4 + 7 = 13	2 · 4 · 8 = 64
2 + 5 + 6 = 13	2 · 5 · 6 = 60
3 + 3 + 7 = 13	3 · 3 · 7 = 63
3 + 4 + 8 = 13	3 · 4 · 6 = 72
3 + 5 + 5 = 13	3 · 5 · 5 = 75
4 + 4 + 5 = 13	4 · 4 · 5 = 80

Como puede verse en la tabla, existen 2 soluciones posibles: un hijo de 1 año, y dos de 6 años; o bien, 2 hijos de 2 años y uno de 9 años.

Si la madre asegura que el hijo mayor está en 4.° de E.G.B., la correcta es la segunda, por ser a los nueve años cuando se estudia normalmente ese curso.

Ej.: Hallar el área de un triángulo equilátero de 4 m de lado.



Para calcular el área del triángulo necesitamos conocer su altura, ya que la base es dato del problema.

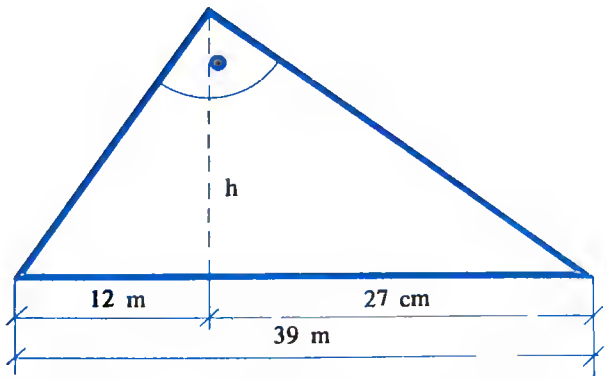
Para calcular la altura aplicaremos un teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo rayado en la figura.

$$4^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h^2 = 4^2 - 2^2 \rightarrow h^2 = 16 - 4 \rightarrow h^2 = 12 \rightarrow h = \sqrt{12} \rightarrow h = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

Luego el área del triángulo es:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow S = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ m^2$$

Ej.: Calcular el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de 12 m y 27 m.



Es evidente que para calcular el área necesitamos conocer la altura del triángulo, ya que su base es conocida.

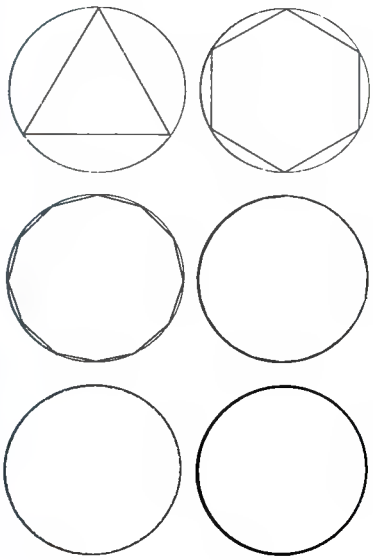
La altura del triángulo la calcularemos aplicando el teorema de la altura del triángulo rectángulo.

$$h^2 = 12 \cdot 27 \rightarrow h^2 = 324 \rightarrow h = \sqrt{324} \rightarrow h = 18 \text{ m}$$

A causa de la fuerza de gravedad, los cuerpos que se dejan libres en el espacio caen verticalmente hacia la superficie terrestre. Si dejamos caer desde cierta altura bolas de plomo, hierro, latón, etc., observaremos que llegan al suelo al mismo tiempo; si dejamos caer una bola de hierro y un trozo de papel, observamos que el papel tarda más en llegar. De esto sacamos una consecuencia: que el aire actúa sobre los cuerpos que caen ejerciendo sobre ellos una fuerza en sentido contrario a la de la gravedad que impide que todos los cuerpos lleguen al mismo tiempo al suelo.

Buscando una aplicación a este principio, el hombre hizo continuos experimentos, hasta conseguir el actual paracaídas, que consiste en una gran cúpula de tela ligera y resistente de unos 60 m^2 que permite reducir la velocidad de caída de una media de 50 m por segundo a unos 6 m por segundo, equivalente a un salto normal desde 3 m de altura. En el año 1912 se realizó con éxito el primer salto en paracaídas desde un avión.

Se suele considerar a menudo al círculo como el límite de un polígono con infinitos números de lados. Conforme vamos inscribiendo en el círculo una serie de polígonos, cada uno con más lados que su anterior, cada polígono va pareciéndose más a un círculo. Bien podría ser que el círculo se nos presentase como un polígono con un número infinito de lados.



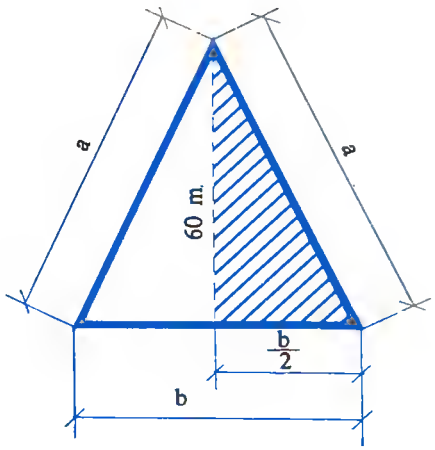
Sin embargo, por lo menos en estas matemáticas, continuaremos considerando al círculo como una curva, **no recte**.

Así que su área es:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow S = \frac{39 \cdot 18}{2} = 351 \text{ m}^2$$

Ej.: Calcular el área de un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 144 m y su altura de 60 m.

Es evidente que para calcular el área necesitamos conocer su base, ya que la altura es dato del problema (cuando en un triángulo isósceles nos hablan de la altura sin más, se supone que es la altura correspondiente al lado desigual la que nos citan).



Para resolver el problema vamos a tener que formar un sistema de ecuaciones: una ecuación va a ser el perímetro del triángulo que es dato y la otra ecuación va a ser el resultado de aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rayado de la figura.

$$\left.\begin{array}{l} a + a + b = 144 \\ a^2 = 60^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2a + b = 144 \\ a^2 = 3.600 + \frac{b^2}{4} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2a + b = 144 \\ 4a^2 = 14.400 + b^2 \end{array}\right\} \rightarrow b = 144 - 2a$$

$$4a^2 = 14.400 + (144 - 2a)^2;$$

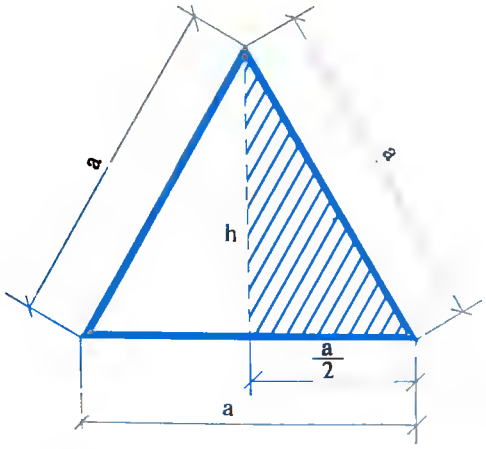
$$4a^2 = 14.400 + 20.736 + 4a^2 - 576a$$

$$576a = 35.136 \rightarrow a = \frac{35.136}{576} = 61 \text{ m} \rightarrow b = 144 - 2 \cdot 61 = 22 \text{ m}$$

Así que el área pedida es:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow S = \frac{22 \cdot 60}{2} = 660 \text{ m}^2$$

Ej.: Hallar el área de un triángulo equilátero, sabiendo que la suma de su base con su altura es 10 m.



Es evidente que para hallar el área necesitamos su base y su altura, elementos ambos que desconocemos. Para averiguar estos datos, plantearemos un sistema de ecuaciones. Una ecuación es que la suma de su base y su altura es 10 m; la otra ecuación resulta de aplicar un teorema de Pitágoras al triángulo rayado en la figura:

$$\left.\begin{array}{l} a+h=10 \\ a^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a+h=10 \\ a^2=h^2+\frac{a^2}{4} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a+h=10 \\ 4a^2=4h^2+a^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a+h=10 \\ 3a^2=4h^2 \end{array}\right\} h=10-a$$

$$3a^2 = 4(10-a)^2;\ 3a^2 = 4(100+a^2-20a);$$

$$3a^2 = 400 + 4a^2 - 80a;\ a^2 - 80a + 400 = 0;$$

$$a=\frac{80\pm\sqrt{6.400-1.600}}{2}=\frac{80\pm\sqrt{4.800}}{2}=\frac{80\pm 40\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\begin{cases} 40+20\sqrt{3} \\ 40-20\sqrt{3} \end{cases}$$

Sustituyendo para obtener h:

$$a = \cancel{40+20\sqrt{3}} \rightarrow h = 10-(40+20\sqrt{3}) = \cancel{-30-20\sqrt{3}}$$

$$a = 40-20\sqrt{3} \rightarrow h = 10-(40-20\sqrt{3}) = -30+2\sqrt{3}$$

La solución tachada no es válida por resultar un número negativo, inapropiado para un lado de un triángulo.

Luego el área del triángulo es:

$$S=\frac{b\cdot h}{2} \rightarrow S=\frac{(40-20\sqrt{3})(-30+2\sqrt{3})}{2}=$$

$$=\frac{-1.200+80\sqrt{3}+600\sqrt{3}-120}{2}=\frac{-1.320+680\sqrt{3}}{2}=$$

$$=-660+340\sqrt{3}\ m^2.$$

Cuando el señor Sautuola paseaba por el campo con su hija, ésta se introdujo en una cueva que ya era conocida, pero a la que realmente nadie se había dedicado a explorar. La niña volvió a donde estaba su padre, diciéndole que había visto animalas pintados en las paredes. D. Marcelino acompañó a su hija al interior de la misma y allí encontró las primeras pinturas que representan bisontes, jaballes y otros animales que cazaba el hombre del Palaolítico superior.

Este sensacional descubrimiento animó al estudio minucioso de la gruta, quedando los investigadores maravillados de lo que se había descubierto.

Las más bellas de las pinturas son las de la época magdaleniense, y pertenecen a la ilamada escuela franco-cantábrica que se caracteriza por la representación de animales de gran tamaño aprovechando los relieves de la piedra y con ausencia total del hombre.

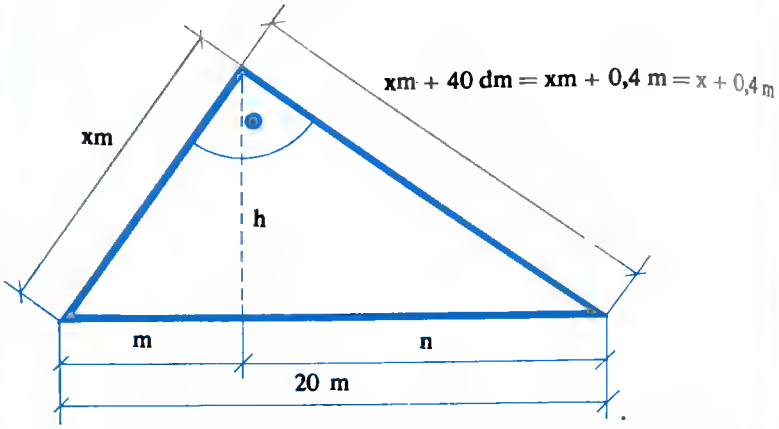
Esta cueva maravillosa, próxima a Santillana del Mar, está considerada como la Capilla Sixtina del Arte Cuaternario, por el asombroso conjunto de pinturas rupestres, único en el mundo, que alberga en su interior.

De todos es sabido dónde se encuentra la Editorial Horizonte (en plena Gran Vía).

Antiguamente, cuando yo venía con el coche, rara era la semana que no me caía una multa. Acumulé en poco tiempo diez de estas multas. El caso curioso era que yo que venía con el coche todos los días (de lunes a sábado) las multas siempre me las ponían los lunes. Solución: Los lunes metía el coche en el aparcamiento y los demás días lo dejaba a espaldas de la oficina. ¿Hice bien?

LA SOLUCION EN PAG. 480.

Ej.: Un triángulo rectángulo tiene de hipotenusa 20 m y uno de los catetos excede al otro en 40 dm. Hallar su área y la altura correspondiente al ángulo recto.



Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos x, con lo que tenemos los dos catetos del triángulo rectángulo.

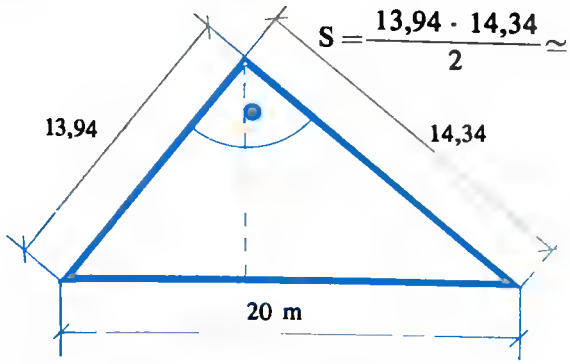
$$20^2 = x^2 + (x + 0{,}4)^2 \rightarrow 400 = x^2 + x^2 + 0{,}16 + 0{,}8x$$

$$2x^2 + 0{,}8x - 399{,}84 = 0;\ x^2 + 0{,}4x - 199{,}92 = 0;$$

$$x = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{0{,}16 + 799{,}68}}{2} = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{799{,}84}}{2} =$$

$$= \frac{-0{,}4 \pm 28{,}28}{2} = \begin{cases} 13{,}94 \\ -14{,}34 \end{cases}$$

La solución negativa prescindimos de ella por la imposibilidad de que un lado sea negativo. Obsérvese que los datos están obtenidos de forma aproximada. Teniendo los catetos para calcular el área del triángulo rectángulo operaremos la mitad del producto de sus catetos.



Para calcular la altura del triángulo correspondiente al ángulo recto, vamos inicialmente a calcular por el teorema del cateto los dos trozos m y n.

$$13{,}94^2 = 20 \cdot m \rightarrow m = \frac{13{,}94^2}{20} = \frac{194{,}32}{20} \simeq 9{,}71 \text{ m}$$

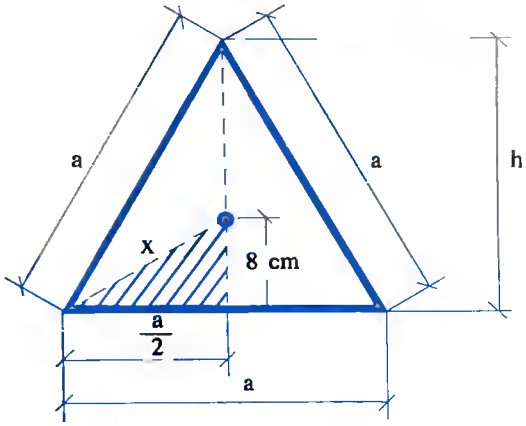
$$14{,}34^2 = 20 \cdot n \rightarrow n = \frac{14{,}34^2}{20} = \frac{205{,}63}{20} \simeq 10{,}28 \text{ m}$$

Aplicando ahora el teorema de la altura, obtendremos ésta:

$$h^2 = 9{,}71 \cdot 10{,}28 \rightarrow h^2 = 99{,}81 \rightarrow h = \sqrt{99{,}81} \rightarrow h \simeq 9{,}99 \text{ m}$$

Ej.: La apotema de un triángulo equilátero mide 8 cm. Determinar el perímetro y el área de dicho triángulo.

Antes de empezar, piénsese que la apotema de un triángulo equilátero es el segmento que parte del centro del triángulo para ir al punto medio de cualquier lado.



El centro de un triángulo equilátero es el baricentro, ortocentro, circuncentro o incentro (todos coinciden en este triángulo). Considerando el baricentro, la distancia del centro (punto donde se cortan las medianas) a lado equivale a $\frac{1}{3}$ de la longitud de la mediana:

$$\frac{1}{3}h = 8 \rightarrow h = 24 \text{ cm}$$

y la distancia x del centro al vértice equivale a los $\frac{2}{3}$ de la mediana:

$$x = \frac{2}{3}24 = 16 \text{ cm}$$

En el triángulo rectángulo rayado de la figura, aplicando un teorema de Pitágoras, obtenemos el lado.

$$16^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 ; 256 = 64 + \frac{a^2}{4} ; 1.024 = 256 + a^2; 768 = a^2;$$

$$a = \sqrt{768}; a = 16\sqrt{3} \text{ cm}$$

Luego el perímetro del triángulo es:

$$P = 3a = 3 \cdot 16\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ m}$$

y el área es:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16\sqrt{3} \cdot 24}{2} = 192\sqrt{3} \text{ m}^2$$

En la ciudad de Nantes en 1828 nació el genial escritor Julio Verne. Este hombre, dotado de una gran fantasía que combinaba con sus grandes conocimientos de las ciencias matemáticas, fue capaz de adelantarse a su tiempo y desarrollar viajes fantásticos.

En su ciudad natal existe un interesante museo dedicado a su memoria, en una antigua villa situada en lo alto de una colina. Se conservan viejas ediciones, manuscritos, dibujos, proyectos y maquetas de sus ingeniosos vehículos, y entre éstas destaca una magnífica reproducción del submarino "Nautilus", en el que el capitán Nemo realizó sus "Veinte mil leguas de viaje submarino", precursor de los modernos sumergibles atómicos de nuestro tiempo.

Julio Verne fue gran aficionado a las cosas de la mar, y así en sus años de triunfo se dedicó a navegar en su lujoso yate de vapor "San Miguel III".

José María Subirachs. Escultor catalán, nació en 1927 en Barcelona. Sin lugar a dudas es uno de los máa grandes escultorea contemporáneos.

Podemos decir que el arte pasa por él, está en él y lo extiende y propaga por el mundo entero. En 1954, abriéndose horizontes, marcha a Bélgica, donde deja constancia de su buen hacer en las ciudades de Bruselas y Brujas. Tiene obras repartidas por toda Europa.

Cruza el océano y marcha a América. Brasil le abre sus puertas como escultor consagrado y desde São Paulo "distribuye" sus obras a las "tres Américas" catalogándole como uno de los mejores escultores del mundo.

Regresa a su Barcelona natal, donde hace lo más difícil, ser profeta en su tierra.

En el fascículo número 15 de nueatra publicación está en portada au obra "Al otro lado del muro", que fue realizada por encargo de ia Delegación Nacional de Deportes, en los años 1971 y 1972.

Sus eaculturas están en ios más importantes museos del mundo: Arte Contemporáneo de Medrid, Jeselyn Art Museum de Omaha (Nebrasca), Universitario de Illinois, Internacionai de Dallas (Tejas), de les Provincias de Barcelona, Arte Moderno de Barceiona, Amberes, Ohio, Ibiza, Ginebra, Taipeh... y un largo etcétera.

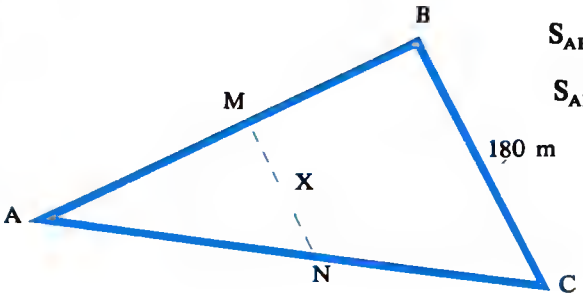
Sirva esta pequeña nota como homenaje, admiración y reconocimiento al artista.

Ej.: Una finca de forma triangular tiene una superficie de 4 Ha y un lado de 180 m. Se desea dividir la finca mediante una paralela a este lado, de modo que el triángulo parcial que resulte tenga una superficie de 1 Ha y 69 áreas. Calcular la longitud de la paralela que ha de trazarse.

Inicialmente vamos a convertir todas las áreas a una sola unidad para operar sin dificultades (convertimos todo a m^2).

$$4 \text{ Ha} = 40.000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ Ha } 69 \text{ a} = 10.000 + 6.900 = 16.900 \text{ m}^2$$



$S_{ABC} = 40.000 \text{ m}^2$

$S_{AMN} = 16.900 \text{ m}^2$

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMN}$ son semejantes. El cuadrado de la razón de semejanza de ambos debe ser igual a la razón de las áreas:

$$K^2 = \frac{40.000}{16.900} \rightarrow K = \sqrt{\frac{40.000}{16.900}} = \frac{200}{130} = \frac{20}{13}$$

Así que estableciendo una relación de semejanza entre los lados, obtenemos la paralela x:

$$\frac{180}{x} = \frac{20}{13} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 13}{20} \rightarrow x = 117 \text{ m}$$

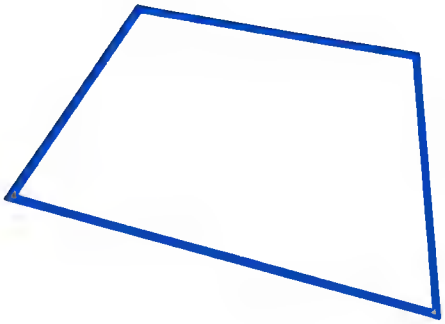
13.–CUADRILATEROS

Se entiende por cuadrilátero a cualquier polígono cerrado de cuatro lados.

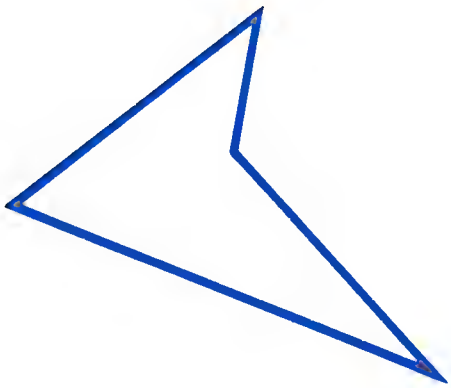
Los cuadriláteros se pueden clasificar de dos formas:

A.–Clasificación por sus ángulos.

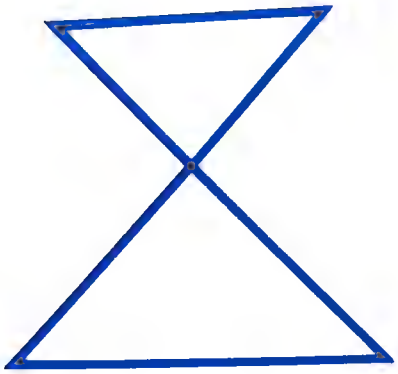
– Convexos, cuando todos los ángulos son convexos.



– Cóncavo, cuando tiene algún ángulo cóncavo.



– Cruzado.



"La matemática pura consiste enteramente en afirmaciones tales como la de que si tal o cual proposición es verdadera para cualquier cosa, entonces tal otra proposición es verdadera para dicha cosa. Lo esencial es no discutir si la primera proposición es realmente verdadera y no mencionar cuál es esa cosa cuelquiera para la que se supone serlo (...). Si nuestra hipótesis se refiere a una cosa cualquiera, y no a alguna o varias cosas particulares, entonces nuestra deducción forma parte de la matemática. Y así puede definirse la matemática como aquel campo en el que no sabemos nunca de qué estamos hablando ni si lo que decimos es verdad.

"Espero que la gente que se sintió embarazada al empezar las matemáticas se sentirá confortada por esta definición y reconocerá que ss exacta."

B. Russell

"La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla."

E. Galois

Xilografía, del griego xilon (madera) y grapho (escribir), significa escritura en madera. Pero su fama se debe al desarrollo de la actividad artística, consistente en grabar en planchas alisadas de madera de boj o cerezo, por medio de buriles, dibujos o textos, que una vez entintados convenientemente permitían la reproducción múltiple de éstos, tantas veces como fuera necesario.

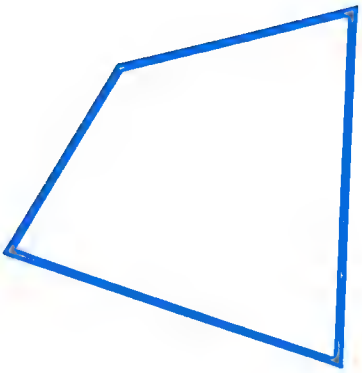
Su desarrollo inicial se sitúa en los albores del año 1400, casi un siglo antes del descubrimiento de América; aunque se tienen noticias de que los chinos lo empiearon ya en el siglo VI de nuestra era. Lo cierto es que mientras la xilografía siguió un derrotero que culminó en la tipografía, en su faceta artística se prolongó a través del tiempo con burilistas como Durero, Rembrandt, Rubens y muchos más de glorioan memoria.

En los primeros años de este siglo se utilizó en forma intensiva pars ilustración de periódicos y revistas de gran difusión, conservándose obras que sorprenden por la habilidad y buen hacer de los artistas dedicados ai perlodismo.

B.—Clasificación por sus lados.

Pueden ser trapezoides, trapecios, paralelogramos, rectángulos, cuadrados, rombos.

No nos extenderemos más en este apartado, ya que cada una de las figuras citadas va a ser motivo de un estudio particular, excepto el trapezoide que es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.



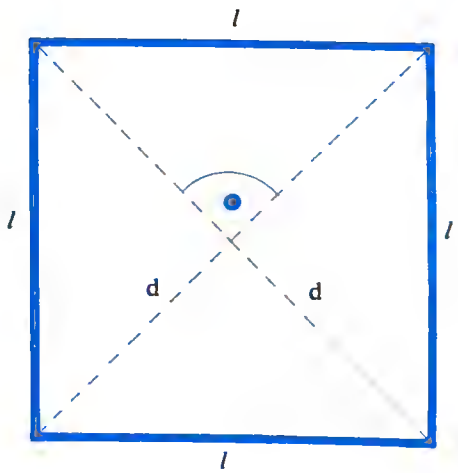
14.—CUADRADO

Es aquel cuadrilátero que responde a las siguientes características:

— Lados todos iguales y paralelos dos a dos.

— Angulos todos iguales y rectos.

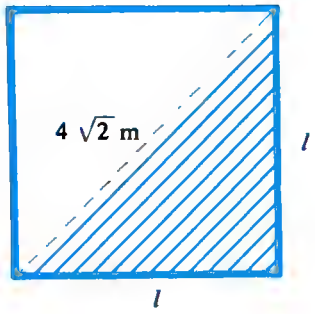
— Diagonales iguales y perpendiculares.



Su área o superficie es su lado al cuadrado.

$$S = l^2$$

Ej.: La diagonal de un cuadrado es $4\sqrt{2}$ m. Hallar el lado del cuadrado correspondiente y su área.

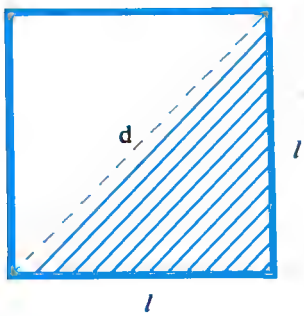


Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo rayado en la figura, obtendremos el lado del cuadrado.

$$(4\sqrt{2})^2 = l^2 + l^2 \rightarrow 32 = 2l^2 \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = \sqrt{16} \rightarrow l = 4 \text{ m}$$

Su área es pues:

$$S = l^2 \rightarrow S = 4^2 \rightarrow S = 16 \text{ m}^2$$



Ej.: Hallar el área de un cuadrado tal que la diferencia entre su diagonal y el lado sea de 5 cm.

Formaremos un sistema de ecuaciones; una de las ecuaciones es la que indica que la diferencia entre su diagonal y el lado es de 5 cm y la otra ecuación del sistema es aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rayado en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} d - l = 5 \\ d^2 = l^2 + l^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} d - l = 5 \\ d^2 = 2l^2 \end{array}\right\} \rightarrow d = 5 + l$$

$$(5 + l)^2 = 2l^2;\ 25 + l^2 + 10l = 2l^2;\ l^2 - 10l - 25 = 0$$

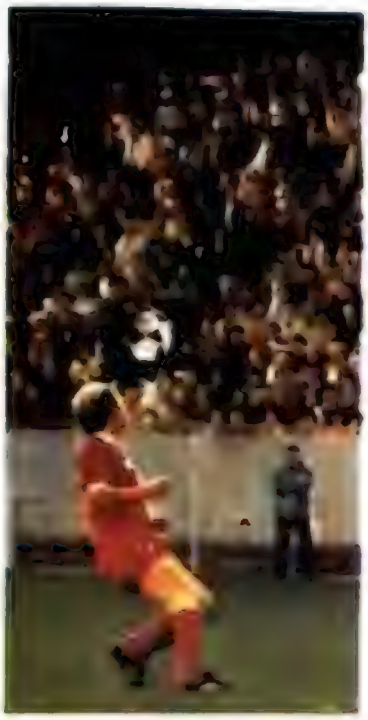
$$l = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 100}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{10 \pm 10\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 5 + 5\sqrt{2} \text{ cm} \\ 5 - 5\sqrt{2} \end{cases}$$

La solución tachada no sirve por ser negativa.

LOS MEJORES CUADROS DEL MUNDO

En la lista que transcribimos a continuación se han seleccionado los mejores cuadros del mundo, según el criterio del respectivo director oficial de la galería donde cada uno de ellos está expuesto:

Museo del Louvre (París), *La Gioconda*, de Leonardo da Vinci; Museo del Prado (Madrid), *Las Meninas*, de Velázquez; Rijksmuseum (Amsterdam), *Ronda nocturna*, de Rembrandt; Galería de La Haya, *El toro joven*, de Paul Potter; Museo del Belvedere (Viena), *Ildafonso Altar*, de Rubens; Museo de Berlín, *Adoración del Cordero*, de Hubert y Jan van Eyck; Galería de Dresde, *Madonna*, de Rafael; Pinacoteca de Munich, *Los devoradores de melón*, de Murillo; Galería de los Oficios (Florencia), *Flora*, de Tiziano; Museo Real de Bellas Artes (Amberes), *El descendimiento de la cruz*, de Quentin Matsys; Palacio Pitti (Florencia), *La virgen de la silla*, de Rafael; Villa Borghese (Roma), *Amor sacro y amor profano*, de Tiziano; Academia de Bellas Artes (Venecia), *Asunción da la Virgen*, de Tiziano.



De todos es sabido que el deporte nacional en España es el fútbol.

En un instituto se celebró un torneo cuadrangular entre los equipos A-B-C y D. El caso curioso es que cada uno de los equipos metió un gol, y sin embargo la clasificación fue:

Equipo A: 4 puntos
Equipo B: 4 puntos
Equipo C: 3 puntos
Equipo D: 1 punto

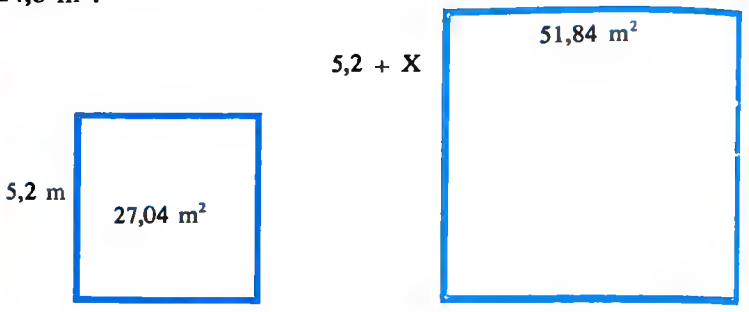
O sea, se metieron cuatro goles, y sin embargo se consiguieron tres veces más de puntos entre todos, o sea, 12 puntos. ¿Cómo se explica esto? ¿Cuáles fueron los resultados?

LA SOLUCION EN PAG. 479.

No calculamos la diagonal por no ser necesaria para el cálculo del área. El área es entonces:

$$S = l^2 \rightarrow S = (5 + 5\sqrt{2})^2 = 25 + 50 + 50\sqrt{2} \rightarrow S = 75 + 50\sqrt{2}\ cm^2$$

Ej.: El lado de un cuadrado mide 5,2 m. ¿En cuánto ha de aumentarse este lado para que el área del cuadrado aumente en 24,8 m^2?



$S = 5{,}2^2 = 27{,}04\ m^2$ $\qquad$ $S = 27{,}04 + 24{,}8 = 51{,}84\ m^2$

Aplicando la expresión del área al cuadrado más grande, obtenemos:

$$(5{,}2 + x)^2 = 51{,}84;\ 27{,}04 + x^2 + 10{,}4x = 51{,}84;$$

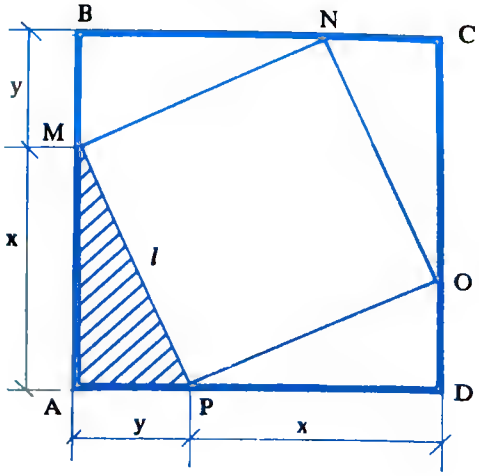
$$x^2 + 10{,}4x - 24{,}8 = 0$$

$$x = \frac{-10{,}4 \pm \sqrt{108{,}16 + 99{,}2}}{2} = \frac{-10{,}4 \pm \sqrt{207{,}36}}{2} =$$

$$= \frac{-10{,}4 \pm 14{,}4}{2} = \begin{cases} 2\ m \\ \cancel{-12{,}4} \end{cases}$$

Así que debemos aumentar el lado del cuadrado primitivo en 2 m.

Ej.: Sobre cada lado de un cuadrado, siempre en el mismo sentido, se toma un punto que divide a cada uno de éstos en dos partes cuya diferencia es 7 dm. El cuadrado que se obtiene uniendo estos cuatro puntos tiene un área que difiere de la del cuadrado primitivo en 120 dm^2. Hallar el lado de este cuadrado.



$S_{ABCD} = (x + y)^2$

$S_{MNOP} = l^2$

Planteemos las ecuaciones correspondientes.

$$x - y = 7$$

$$(x + y)^2 = l^2 + 120$$

Considerando el triángulo rectángulo rayado de la figura y aplicándole un teorema de Pitágoras relacionamos x, y, l ($l^2 = x^2 + y^2$).

Así que el sistema de ecuaciones planteado inicialmente adquiere la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ (x+y)^2=x^2+y^2+120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ x^2+y^2+2xy=x^2+y^2+120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ 2xy=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x-y=7 \\ xy=60 \end{array}\right\} \rightarrow x = 7 + y$$

$$(7 + y)\, y = 60;\ 7y + y^2 = 60;\ y^2 + 7y - 60 = 0;$$

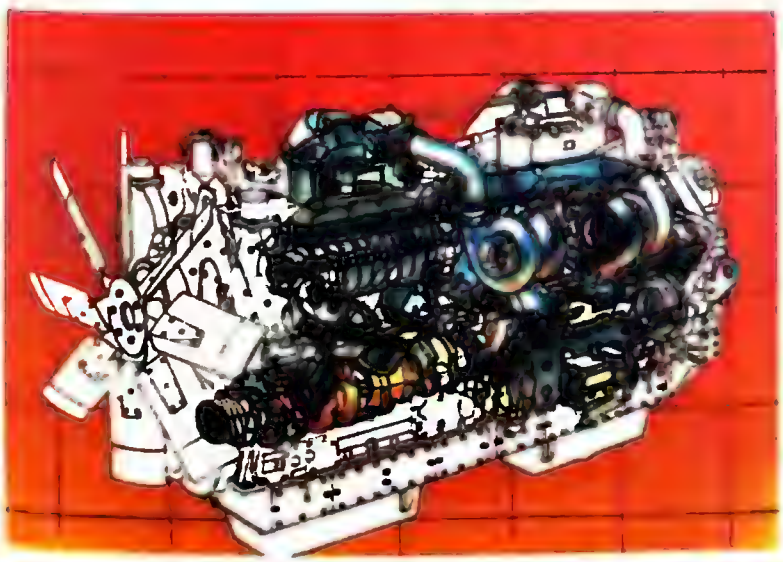
$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2} = \begin{cases} 5 \\ \cancel{-12} \end{cases}$$

$$y = 5 \text{ dm} \rightarrow x = 12 \text{ dm}$$

Luego el lado del cuadrado pedido es:

$$l^2 = x^2 + y^2 \rightarrow l^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow l^2 = 25 + 144 \rightarrow l^2 = 169 \rightarrow l = \sqrt{169}$$

$$l = 13 \text{ dm}$$



Cuando en el año 1913, durante la travesía hacia Inglaterra, cayó al mar el ingeniero alemán Rodolfo Diesel, se perdió un proyectista de gran capacided creativa.

Su tenacidad y la afición que tenía a la mecánica y al cálculo le llevaron, después de muchos estudios, a publicar en ei año 1893 un folleto titulado "Teoría y construcción de un motor térmico racional". En éi describía el motor que más adelante llevaría su nombre y que se basa en la utilización de la fuerza expansiva de la combustión del petróleo o aceites minerales pesados, provocada al mezclarse éstos con el aire calentado a altas temperaturas por compresión.

Este tipo de motor funcionó de forma práctica y por primera vez en el año 1897, y desde entonces en un constante perfeccionamiento se viene utilizando en ferrocarriles, camiones, máquinas de obras públicas, minería y toda clase de trabajos pesados. Ultimamente, y llevando al extremo la perfección de los cálculos y aquilatando al máximo la resistencia de los materiales, se están construyendo pequeños motores del sistema diesel para equipar también a los automóviles de turismo.

Un chico llega a su casa y la dice al padre:

—¡Aquí tienes tu encargo de la ferretería!

Después de abrir el pequete, el padre le dice a su hijo:

—Muy bien, ¿cuénto te ha costado?

—Los ochocientos cuestan seiscientas pesetas, o sea, doscientas pesetas cada pieza —dice el hijo.

Así es, efectivamente.

¿Qué fue lo que compró?

LA SOLUCION EN EL PROXIMO NUMERO, PAG. 480.

¿Qué se tarda más en recorrer a la velocidad de la luz (300.000 Km/seg.), un espacio infinito o un espacio infinito menos un millón de Km.?

SOLUCION:

¿Cuándo has visto tú que se pueda restar un número finito de un infinito?

Creo que un espacio infinito es exactamente igual que un espacio infinito, menos un millón de Km. Luego se tardará lo mismo, un tiempo... infinito.

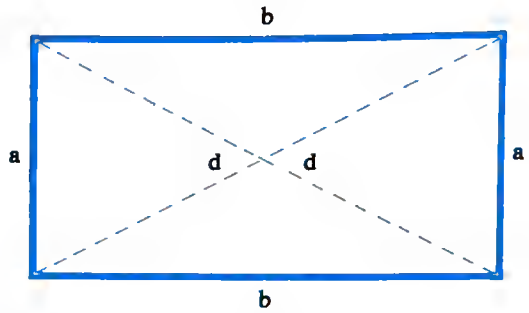
15.–RECTANGULO

Es aquel cuadrilátro que responde a las siguientes características:

– Lados iguales dos a dos y paralelos dos a dos.

– Angulos todos iguales y rectos.

– Diagonales iguales y no perpendiculares.

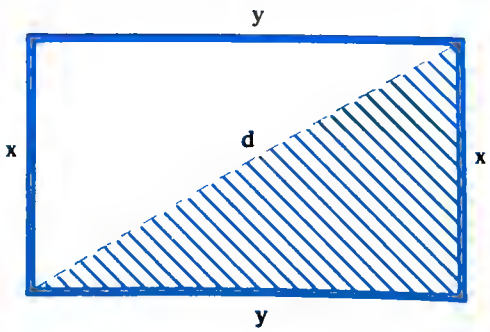


Su área o superficie es el producto de sus dos dimensiones.

$$S = a \cdot b$$

Ej.: En un rectángulo, cada diagonal mide 8 cm más que uno de sus lados y 16 cm más que el otro. Hallar el área y el perímetro del rectángulo.

Es evidente que tanto para calcular el área como el perímetro del rectángulo necesitamos conocer sus dimensiones.



$d = y + 8$

$d = x + 16$

Planteemos un sistema de ecuaciones; una ecuación resulta de igualar el valor de la diagonal y la otra de aplicar un teorema de Pitágoras al triángulo rayado en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} d = y + 8 \\ d = x + 16 \end{array}\right\rangle y + 8 = x + 16$$

$$d^2 = x^2 + y^2;\ (y + 8)^2 = x^2 + y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} y - x = 8 \\ y^2 + 64 + 16y = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} y - x = 8 \\ x^2 - 16y = 64 \end{array}\right\} \rightarrow y = 8 + x$$

$x^2 - 16(8 + x) = 64$; $x^2 - 128 - 16x = 64$; $x^2 - 16x - 192 = 0$;

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 768}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{1.024}}{2} = \frac{16 \pm 32}{2} = \begin{cases} 24 \text{ cm} \\ -8 \end{cases}$$

$$x = 24 \text{ cm} \rightarrow y = 32 \text{ cm}$$

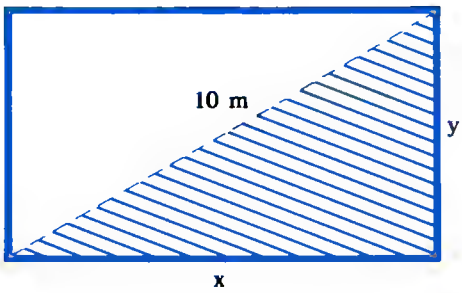
luego su área es:

$$S = 24 \cdot 32 = 768 \text{ cm}^2$$

y su perímetro es:

$$P = 2 \cdot 24 + 2 \cdot 32 = 48 + 64 = 112 \text{ cm}$$

Ej.: Un rectángulo tiene 48 m^2 de área y su diagonal es de 10 m. Hallar la longitud de sus lados.



$S = 48 \text{ m}^2$

Plantearemos un sistema de ecuaciones: una de ellas es la condición del área y la otra aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rayado en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} xy = 48 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{48}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{48}{x}\right)^2 = 100; \; x^2 + \frac{2.304}{x^2} = 100; \; x^4 + 2.304 = 100x^2;$$

$$x^4 - 100x^2 + 2.304 = 0$$

$$x^2 = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 9.216}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{100 \pm 28}{2} =$$

$$= \begin{cases} 64; \; x^2 = 64; \; x = \sqrt{64} = 8 \text{ m} \\ 36; \; x^2 = 36; \; x = \sqrt{36} = 6 \text{ m} \end{cases}$$

Para $x = 8$ m $\rightarrow y = 6$ m

Para $x = 6$ m $\rightarrow y = 8$ m

Cualquier solución que elijamos es válida.

MONEDAS

Pon encima de la mesa veinte monedas. Cada jugador por turno tiene que sacar 1, 3, 5, 7 ó 9 monedas obligatoriamente.

Gana el que coge la última moneda.

¿De qué forma ganarle a un amigo?

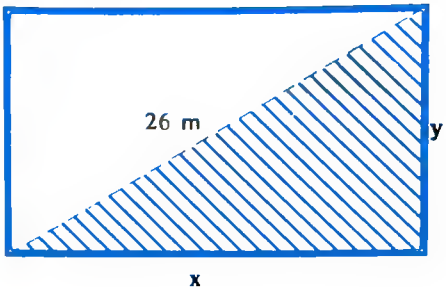
La solución es bien sencilla. Sé galante y educado y cédele al amigo la primicia de sacar, para que vea que no hay trampa. Puede coger las monedas que quiera (1, 3, 5, 7 ó 9) que, haciendo tú lo mismo pero **toméndolas después**, la última moneda la tomerás siempre tú, ya que al ser **par** el número de monedas, el amigo toma un número impar de monedas y tú otro número imper; la suma de dos números impares da siempre PAR.

Una frase que se repite muy a menudo es que nadie sabe lo que vale la salud hasta que se pierde. Efectivamente, la salud es uno de los más preciados tesoros que tenemos los hombres, y como parece más normal estar sano que enfermo, hay muchas personas que apenas si se preocupan por la defensa de su organismo, que descuidan completamente sus defensas contra los enemigos visibles e invisibles que en todo momento acechan la salud humana.

A ese hombre sano, al que no le preocupa la salud porque lo considera como un hecho normal, le llega, quizá, un día en que comienza a sentirse mal, en que las fuerzas le abandonan, y el dolor hace su aparición: ha entrado en su cuerpo la enfermedad; de hombre sano ha pasado a ser un hombre enfermo. Muchas veces nadie es capaz de explicar por qué o cómo un hombre ha enfermado, pero otras veces sí es explicable, y es porque aquel hombre ha abandonado la guardia, no se ha preocupado de defender su organismo, y los microbios portadores de la enfermedad le han invadido.

Por consiguiente, como la salud precede a la enfermedad, lo que debemos procurar en primer lugar y con el mayor cuidado es conservar ese tesoro inmenso que es la salud.

Ej.: Un solar de forma rectangular tiene la diagonal de 26 m; la diferencia entre sus dos lados contiguos es de 14 m. Se desea saber el valor del solar al precio de 1.500 ptas. el metro cuadrado.



$x - y = 14$

Para saber el precio del solar debemos saber antes el área de éste, pero notamos que necesitamos sus dimensiones para buscar su área. Así que el primer paso es localizar sus dimensiones, mediante un sistema de ecuaciones; una de las ecuaciones es la de la diferencia de sus lados igual a 14 y la otra aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rayado en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 14 \\ x^2 + y^2 = 26^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y = 14 \\ x^2 + y^2 = 676 \end{array}\right\} x = 14 + y$$

$$(14 + y)^2 + y^2 = 676;\ 196 + y^2 + 28y + y^2 = 676;$$

$$2y^2 + 28y - 480 = 0;\ y^2 + 14y - 240 = 0;$$

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 960}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{1.156}}{2} = \frac{-14 \pm 34}{2} = \begin{cases} 10 \text{ m} \\ -24 \end{cases}$$

$$y = 10 \text{ m} \rightarrow x = 24 \text{ m}$$

La superficie del solar es pues:

$$S = xy = 24 \cdot 10 = 240 \text{ m}^2$$

Como el precio del m^2 es de 1.500 pesetas, el valor del solar es:

$$\text{PRECIO} = 240 \cdot 1.500 = 360.000 \text{ pesetas}$$

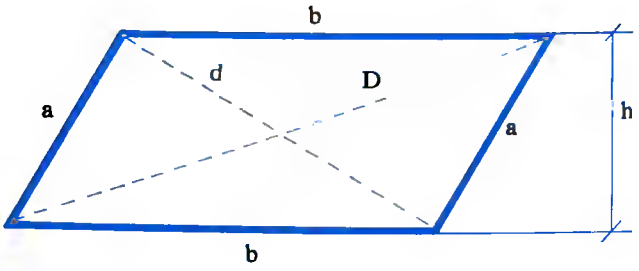
16.–PARALELOGRAMO

Es aquel cuadrilátero que responde a las siguientes características:

– Lados iguales dos a dos y paralelos dos a dos.

– Angulos iguales dos a dos.

Diagonales distintas y no perpendiculares.



Su área o superficie es el producto de su base por su altura:

$$S = b \cdot h$$

Ej.: Los lados de un paralelogramo miden 51 cm y 24 cm. La diagonal menor es perpendicular al lado menor.

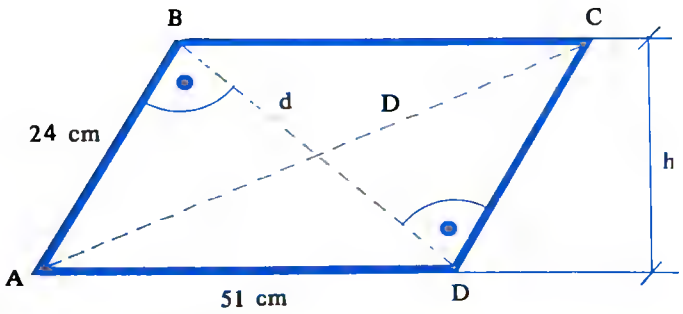
Se pide:

a) La diagonal menor.

b) El área del paralelogramo.

c) La distancia entre sus dos lados mayores.

d) La distancia entre sus dos lados menores.



Las armas de fuego que nacieron con los primitivos cañones se fueron perfeccionando y se construyeron modelos más manejables como la culebrina, pieza intermedia entre el cañón y el arcabuz, que disparaba pequeñas bolas de hierro.

El arcabuz empezó a usarse en el siglo XVI, y fue una revolución en su época. Tenía cañón de hierro y cuerpo de madera. Se disparaba prendiendo la pólvora de la carga por medio de una mecha móvil acoplada al arma. Fue muy usada por los tercios españoles. Con la práctica se vio la necesidad de conseguir un arma que se pudiera cargar y manejar con una sola mano, y así se llamó pistola a una especie de pequeño arcabuz donde la ignición se realizaba por la chispa del pedernal. Durante trescientos años se fabricaron y usaron este tipo de pistolas de percusión.

Su manufactura artesanal hacía que los armeros de aquella época rivalizaran en los modelos de su creación, uniendo en ellos la mejor calidad técnica que podían, con su sentido artístico y del adorno que hacen de ellas verdaderas joyas. Se conservan ejemplares pertenecientes a príncipes y reyes con recubrimientos de oro, plata y piedras preciosas.

Hoy día continúan fabricándose como objeto decorativo, e incluso en las federaciones de tiro se organizan campeonatos con pistolas de aste tipo.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL COLUMPIO DE LA PAG. 43B:

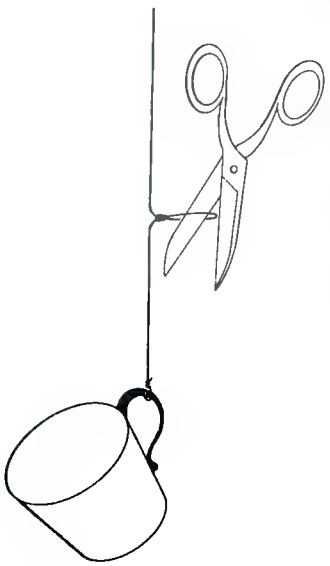
Cálculo de la seperación:

2 (6 − 1) = 12 − 2 = 10 m., que es precisamente la medida de la cuerda, o sea, que los postes estén completamente pegados el uno con el otro. Como hagas un columpio con arreglo a estas medidas verás qué leñazo te pegas.

PROBLEMA DE LA TAZA DE LA PAG. 443:

La solución es muy fácil:

Por el centro del hilo, aproximadamente, se hace un lazo o una coca con un nudo; cortamos la parte del lazo y el hilo sigue todavía atado, o sea, unido. Hemos cortado el hilo, efectivamente, que era lo que se pedía, y sin embargo la taza no cae porque sigue atada.



a) La longitud de la diagonal menor se obtiene aplicando un teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\widehat{ABD}$.

$$51^2 = 24^2 + d^2;\ 2.601 = 576 + d^2;\ d^2 = 2.025;\ d = \sqrt{2.025} = 45 \text{ cm}$$

b) El área del paralelogramo sabemos que es base por altura; sin embargo en este caso es más cómodo hallar el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABD}$ y multiplicarla por dos, ya que el triángulo $\widehat{BCD}$ tendrá un área igual. Así, pues, el área del triángulo rectángulo será la mitad del producto de sus catetos.

$$S_{ABD} = \frac{24 \cdot 45}{2} = 540 \text{ cm}^2$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 540 = 1.080 \text{ m}^2$$

c) La distancia entre sus dos lados mayores la hallamos utilizando el área y considerando como base al lado mayor de 51 cm.

$$1.080 = 51 \cdot h \rightarrow h = \frac{1.080}{51} \simeq 21{,}17 \text{ cm}$$

d) La distancia entre sus dos lados menores es precisamente la diagonal menor, que ya se indica que es perpendicular a ambos lados menores.

$$d = 45 \text{ cm}$$

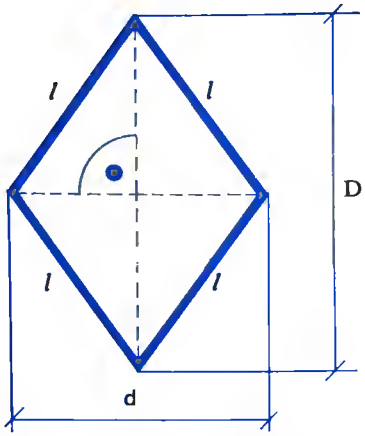
17.–ROMBO

Es aquel cuadrilátero que responde a las siguientes características:

– Lados todos iguales y paralelos dos a dos.

– Angulos iguales dos a dos.

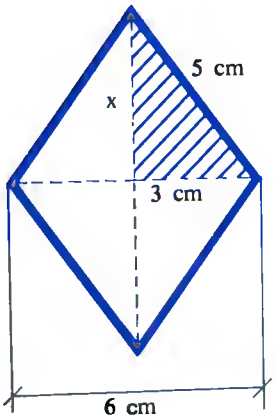
– Diagonales distintas y perpendiculares.



Su área o superficie es la mitad del producto de sus dos diagonales.

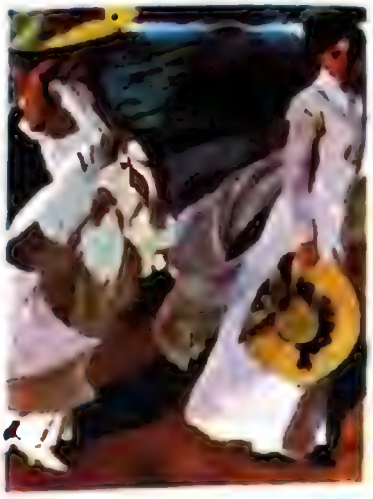
$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ej.: Hallar el área de un rombo del que se conoce su lado, que mide 5 cm y una de sus diagonales igual a 6 cm.



Como para hallar el área de un rombo necesitamos conocer sus diagonales, en el triángulo rayado de la figura, aplicando el teorema de Pitágoras, podemos obtener la mitad de la otra diagonal.

$5^2 = 3^2 + x^2 \rightarrow 25 = 9 + x^2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \sqrt{16} \rightarrow x = 4$ cm



Difícilmente se hallará un hombre de tan sostenido amor al trabajo como Joaquín Sorolla y Bastida. Entregado a su noble oficio, nunca midió horas ni escatimó esfuerzos.

Pintando era incontenible. Decía que si, físicamente, pudiera, le gustaría pintar todas las horas del día y de la noche. Pintó 2.500 cuadros y 15.000 apuntes y dibujos en sus cuarenta años de vida profesional.

Manifestó ampliamente su gran pasión por la pintura, una laboriosidad constante y una maravillosa facilidad de ejecución.

Nació en Valencia, de padre aragonés. A la muerte de sus padres, cuando apenas tenía dos años, fue recogido por unos tíos que no sólo no se opusieron a sus aficiones sino que le animaron a estudiar en firme.

En Valencia ganó por oposición la plaza de pensionado en Roma. Al empezar el año 1890 se instala en Madrid. Aquí se abre un período luminoso en su pintura. En quince años alcanza quince recompensas europeas. En sus salidas al extranjero, la que obtuvo mayor resonancia fue la de Nueva York. Valencia tiene en él a uno de sus hijos más ilustres.

Las Reales Atarazanas de Barcelona, actualmente convertidas en museo marítimo, constituyen un caso singular de edificio construido en la Edad Media, que se conserva íntegro en sus elementos esenciales. El creador fue Pedro IV el Ceremonioso.

Tenía once gradas para la construcción de barcos. Posteriormente se unieron varias formando la grada central, en la cual se encuentra actualmente la reproducción de la galera real de D. Juan de Austria, construida aquí en el año 1568. Estas Reales Atarazanas trabajaron a pleno rendimiento hasta mediados del siglo XVIII.

La galera, que venía utilizándose desde el siglo V, llegando hasta el siglo XVII, en que fue equipada con artillería, cofas de combate, desde las que arcabuceros y arqueros efectuaban sus tiros. Los remeros, cinco o seis por remo, ya estaban protegidos por techos y escudos. La vela sólo se utilizaba en tiempo favorable y tenía espolón de hierro o bronce.

Pues bien, después de Lepanto, en que este barco tuvo su cénit, desapareció completamente.

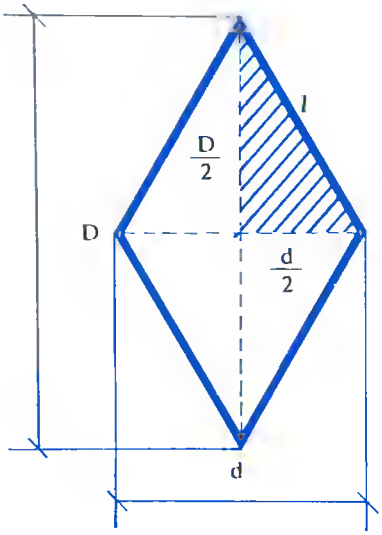
Las Atarazanes que estaban entonces al borde del mar fueron perdiendo importancia. El museo actual fue inaugurado en 1941

La otra diagonal es: $D = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

Luego el área es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Ej.: Un rombo cuya área es 42 m^2 tiene como suma de sus diagonales 20 m. Hallar su perímetro.



$S = 42 \text{ m}^2$

$D + d = 20$

Para hallar su perímetro habrá que averiguar la longitud del lado. Asunto que conseguiremos localizando el valor de sus diagonales y aplicando un teorema de Pitágoras al triángulo rayado de la figura.

Para el cálculo de diagonales plantearemos un sistema de ecuaciones: una ecuación es que la suma de ambas es de 20 m, y la otra la condición del área.

$$\left.\begin{array}{l} D + d = 20 \\ \dfrac{D \cdot d}{2} = 42 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} D + d = 20 \\ D \cdot d = 84 \end{array}\right\} \rightarrow D = 20 - d$$

$$(20 - d)\,d = 84;\ 20d - d^2 = 84;\ d^2 - 20d + 84 = 0;$$

$$d = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 336}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{array}{l} 14 \\ 6 \end{array}$$

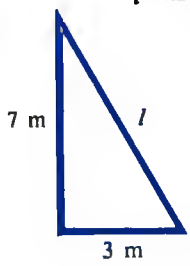
Para $d = 14$ m $\quad D = 6$ m

Para $d = 6$ m $\quad D = 14$ m

Cualquier solución es válida.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rayado de la figura:

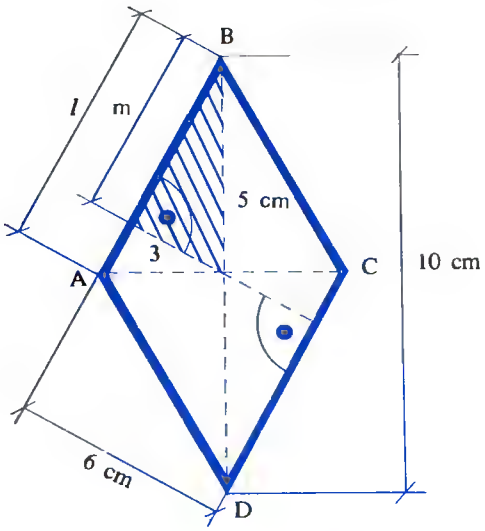
$$l^2 = 7^2 + 3^2;\ l^2 = 49 + 9;\ l^2 = 58;\ l = \sqrt{58}\ \text{m}$$



Así que el perímetro es:

$$P = 4l = 4\sqrt{58}\ \text{m}$$

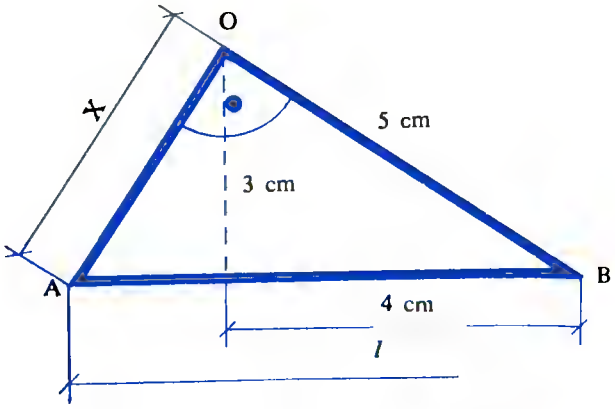
Ej.: La distancia entre dos lados opuestos de un rombo es de 6 cm, y una de las diagonales mide 10 cm. Calcular el área y lado del rombo.

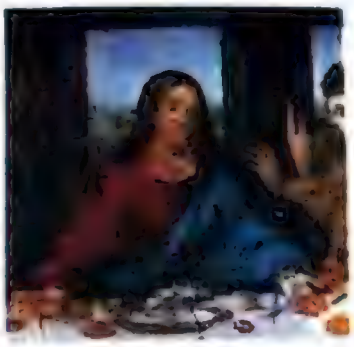


En el triángulo rayado de la figura, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos la distancia m.

$$5^2 = 3^2 + m^2;\ 25 = 9 + m^2;\ m^2 = 16;\ m = \sqrt{16} = 4\ \text{cm}$$

En el triángulo $\widehat{ABO}$ se pueden hacer las siguientes consideraciones:





Los turistas que han visitado recientemente el antiguo refectorio del convento de Santa María delle Grazie, cercano a Milán, para ver lo que queda de *La Ultima Cena,* de Leonardo, se han encontrado con un insólito espectáculo.

A lo largo de una sección de la celebrada pintura. se ha construido un andamiaje, en cuyo punto más elevado está sentado un hombre que medita y cavila; luego, realiza algunos movimientos leves, cautelosos, estudiados.

Palpa con gráciles dedos la pared sobre la que se ha pintado el famoso fresco. Realiza un minucioso escrutinio, palmo a palmo, a la luz de una potente lámpara. Su nombre es Oreste Silvestri, y puede ser llamado *El cirujano del arte.*

El señor Silvestri, después de haber descubierto el lugar donde la pintura se está deteriorando, inserta una aguja hipodérmica entre la corteza y la pared, y aplica a la superficie una inyección de esencia de petróleo. La esencia es absorbida y se expande, y entonces la pared queda preparada para una inyección de resina liviana. Este procedimiento permite la adherencia de la pintura descascarada al yeso de la pared.

Con la ayuda de estufas eléctricas se suaviza la zona restaurada, y entonces se pasa sobre su superficie un hierro caliente, que asegura y afirma la adherencia.

Y, finalmente, una esponja borra la luminosidad artificial del barnizado. De esta manera, paso a paso, *La Ultima Cena* queda a salvo de la ruina.

Aplicando el teorema del cateto a este triángulo obtenemos:

$$5^2 = 4 \cdot l \rightarrow 25 = 4l \rightarrow l = \frac{25}{4} = 6{,}25 \text{ m}$$

Así que el cateto x, aplicando un teorema de Pitágoras, es:

$$5^2 + x^2 = 6{,}25^2;\ 25 + x^2 = 39{,}0625;\ x^2 = 14{,}0625;$$

$$x = \sqrt{14{,}0625} = 3{,}75 \text{ m}$$

Luego las diagonales son:

$$D = 10 \text{ m y } d = 2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5 \text{ m}$$

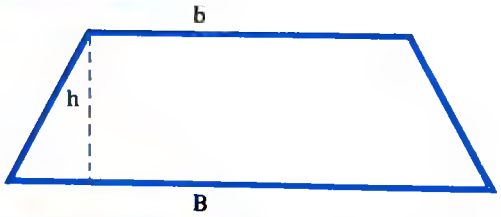
De esta forma el área del rombo es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2} \rightarrow S = \frac{10 \cdot 7{,}5}{2} = 37{,}5 \text{ m}^2$$

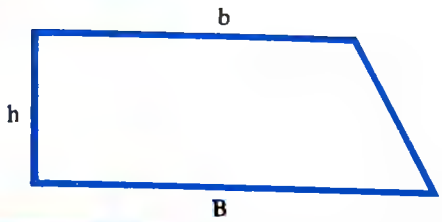
18.—TRAPECIO

En general los trapecios son cuadriláteros que pueden ser de tres tipos:

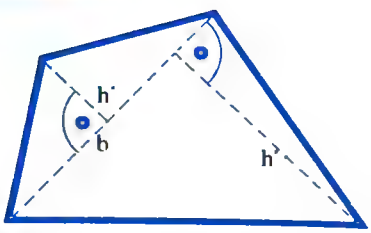
— **Trapecio isósceles.**—Cuando los dos lados no paralelos son iguales.



— **Trapecio rectángulo.**—Cuando posee dos ángulos rectos.



— **Trapecio escaleno.**—Cualquier otro caso distinto a los anteriores.



También recibe el nombre de trapezoide.

En un autódromo, dos coches salen al mismo tiempo de un mismo punto M. Dicho circuito tiene 5 Km. de longitud.

Durante toda la carrera los coches llevan siempre la misma velocidad dando vueltas al circuito.

Sabemos que el coche A, al ir mucho más rápido que el B, pasa a éste cada 2 Km. Se pregunta: ¿A qué distancia del punto de partida lo pasará o adelantará por tercera vez?

Muy facilito.

LA SOLUCION EN PAG. 496.

El área o superficie de un trapecio isósceles o rectángulo es la mitad de la suma de sus bases por la altura.

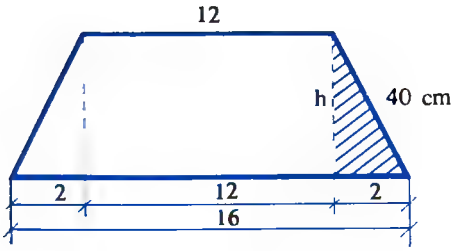
$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

El área o superficie de un trapecio escaleno es igual a la mitad del producto de una de sus diagonales por la suma de las perpendiculares, trazadas a ella desde los otros dos vértices:

$$S = \frac{b\,(h + h')}{2}$$

NOTA.—Obsérvese que el área de un trapezoide es la suma de las áreas de dos triángulos con base común.

Ej.: Las bases de un trapecio isósceles miden 12 cm y 16 cm, y el lado oblicuo 4 dm. Calcular el área del trapecio.



$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

Para calcular el área se necesita tener la altura del trapecio, altura que se puede obtener mediante la aplicación de un teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo rayado de la figura.

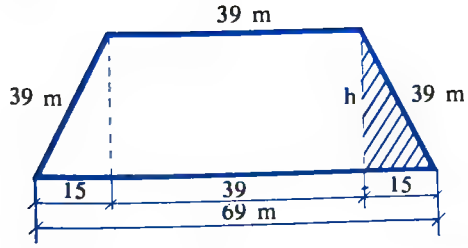
$$40^2 = h^2 + 2^2;\ 1.600 = h^2 + 4;\ h^2 = 1.596;$$

$$h = \sqrt{1.596} = 2\sqrt{399}\ \text{cm}$$

Luego su área es:

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{16 \cdot 12}{2} \cdot 2\sqrt{399} = 192\sqrt{399}\ \text{cm}^2$$

Ej.: Calcular el área de un trapecio isósceles, sabiendo que la base mayor mide 69 m y cada uno de los otros tres lados mide 39 m.



$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

La clorofila es un compuesto necesario para la vida. Es, en esencia, la parte verde de los vegetales.

Es un compuesto orgánico semejante a la hemoglobina roja de los animales.

Es insoluble en el agua, pero puede extraerse de los órganos vegetales verdes con acetona acuosa. Interviene en la fotosíntesis, o sea, en el proceso de formación de materia orgánica a partir de anhídrido carbónico y agua, transformando la energía lumínica en la energía química necesaria para que se produzcan las reacciones que hacen posible la vida, pues los animales necesitan absorber sustancias orgánicas para vivir, ya sea comiendo plantas (herbívoros) o devorando a otros animales (carnívoros). Modernamente se aplica la clorofila en el tratamiento de varias enfermedades y en operaciones quirúrgicas. También se usa como colorante natural inofensivo en productos alimenticios.

El armero Colt, tan famoso posteriormente por el uso que de sus armas se hizo en el Oeste americano, construyó en el año 1835 una pistola con varios cañones y a medida que se realizaban los disparos giraban éstos y se colocaban en la posición correcta para que el percutor aplastara la cápsula de cada uno de ellos.

Posteriormente construyó una pistola con un solo cañón y en el que giraba un tambor provisto de seis balas.

En un principio se cargaba por la boca, modificándose posteriormente, pudiendo realizar esta carga directamente por el tambor.

Esta famosísima pistola se llamó revólver y todavía se sigue utilizando por la imposibilidad de encasquillarse, ya que si no sale una bala, queda en el tambor, pudiéndose utilizar las otras cinco. Es arma usada en todo el mundo.

Con este arma se pueden conseguir punterías extraordinarias como disparar los seis tiros dando en el mismo punto con diferencia sólo de milímetros, o partir cuerdas, barajas y cigarrillos, como tantas veces hemos visto en el cine.

En el triángulo rectángulo rayado en la figura, mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, calculamos la altura del trapecio, necesaria para poder obtener su área.

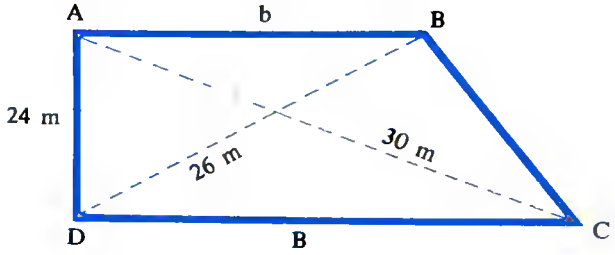
$$39^2 = 15^2 + h^2;\ 1.521 = 225 + h^2;\ h^2 = 1.296;$$

$$h = \sqrt{1.296} = 36 \text{ m}$$

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{69 + 39}{2} \cdot 36 = 1.944 \text{ m}^2$$

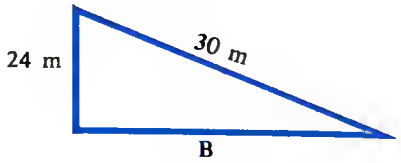
Ej.: Las diagonales de un trapecio rectángulo miden 26 m y 30 m, respectivamente, y su altura 24 m. Se pide el área del trapecio.

Considerando la figura del problema:



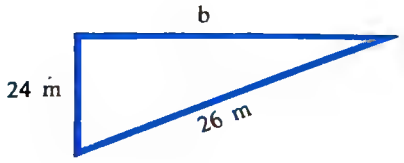
Si la superficie de un trapecio es $S = \frac{B + b}{2} \cdot h$, necesitamos conocer sus bases para conocer su área. Estas bases las calculamos mediante un teorema de Pitágoras en los triángulos siguientes:

– Triángulo $\widehat{ACD}$



$$30^2 = 24^2 + B^2;\ 900 = 576 + B^2;\ B^2 = 324;\ B = \sqrt{324} = 18 \text{ m}$$

– Triángulo $\widehat{ABD}$

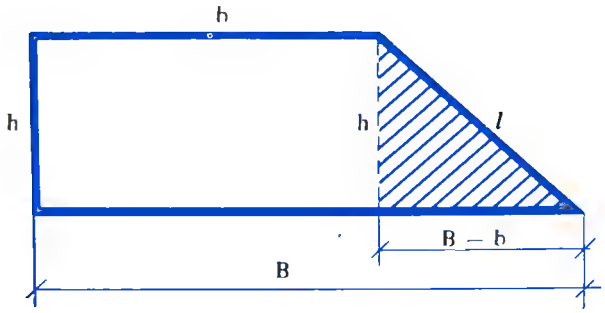


$$26^2 = 24^2 + b^2;\ 676 = 576 + b^2;\ b^2 = 100;\ b = \sqrt{100} = 10 \text{ m}$$

Luego su área es:

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{18 + 10}{2} \cdot 24 = 336 \text{ m}^2$$

Ej.: La base mayor de un trapecio rectángulo es 5/3 de la base menor y el doble del lado oblicuo. Calcular los cuatro lados del trapecio, sabiendo que el área es 96 dm^2.



Imponiendo las condiciones que dicta el problema, tenemos:

$$\frac{B + b}{2} \cdot h = 96 \rightarrow \frac{B + \frac{3B}{5}}{2} \cdot h = 96; \frac{5B + 3B}{10} \cdot h = 96;$$

$$h = \frac{960}{8B} = \frac{120}{B}$$

$$B = \frac{5}{3} b \rightarrow b = \frac{3B}{5}$$

$$B = 2l \rightarrow l = \frac{B}{2}$$

$$l^2 = (B - b)^2 + h^2 \rightarrow \left(\frac{3B}{5}\right)^2 = \left(B - \frac{3B}{5}\right)^2 + \left(\frac{120}{B}\right)^2;$$

$$\frac{9B^2}{25} = \frac{4B^2}{25} + \frac{14.400}{B^2}; 9B^2 = 4B^2 + 360.000; 5B^4 = 360.000;$$

$$B^4 = \frac{360.000}{5} = 72.000; B = \sqrt[4]{72.000} = 4\sqrt[4]{4.500} \text{ dm}$$

$$h = \frac{120}{4\sqrt[4]{4.500}} = \frac{30}{\sqrt[4]{4.500}} \text{ dm}$$

$$b = \frac{3 \cdot 4\sqrt[4]{4.500}}{5} = \frac{12\sqrt[4]{4.500}}{5} \text{ dm}$$

$$l = \frac{4\sqrt[4]{4.500}}{2} = 2\sqrt[4]{4.500} \text{ dm}$$

Cuando en alguna feria o verbena vemos a un paciente viejecito que, provisto de papel negro y unas pequeñas tijeritas, ofrece a los transeúntes hacerles su silueta recortada a cambio de un poco de dinero, este hombre está practicando un arte menor y hoy totalmente en desuso. Este arte se llama Cisografía, y en tiempos pasados tuvo decididos cultivadores. Como su nombre indica, se puede definir como arte de dibujar o escribir cortando. En la Biblioteca Nacional se conservan bellas y valiosas estampas realizadas por este método. Con cuchillas o tijeras apropiadas se recortan de un papel las partes necesarias conservando del mismo lo que serán las líneas o masas que constituyen propiamente el dibujo.

Este primoroso y paciente encaje realizado en papel se monta sobre fondo oscuro y ya tenemos la obra realizada.

Se puede también enmarcar, poniéndole cristal, para adorno de cualquier estancia.

PENSAMIENTOS

"En el camino de la amistad, no dejad crecer la hierba."

A. D. Dutrambiay

"Censura a tu amigo en secreto; elábale ante los demás."

Leonardo de Vinci

"El reproche se parece al viento: aunque no se le vea, se le siente."

(Proverbio malgacha)

"Perdona a un amigo; ganarás amigos."

P. Siro

"Cuando mis amigos son tuertos, yo los miro de perfil."

J. Joubart

"Dios me guarde de mis amigos, de mis enemigos yo me encargo."

Antígono II

"Haz el bien y tíralo a la mar."

(Proverbio árabe)

"Oculta el bien que haces; imita al Nilo, que disimula sus fuentes."

(Proverbio egipcio)

"No hay que señalar los defectos ajenos con un dedo sucio."

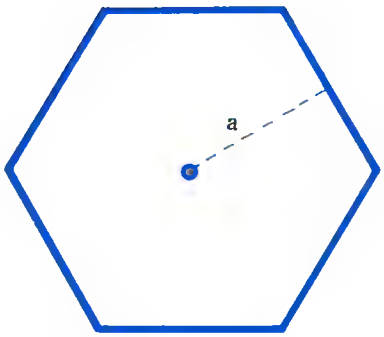
(Proverbio italiano)

"El ruido no hace bien y el bien no hace ruido."

San Vicente de Paúl

19.—POLIGONOS REGULARES

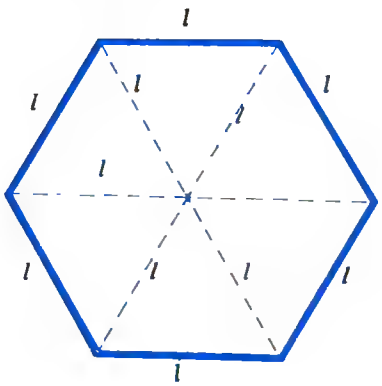
Se entiende por polígono regular a aquel que tiene los ángulos interiores y los lados iguales. El área o superficie de un polígono regular es la mitad de su perímetro por su apotema.



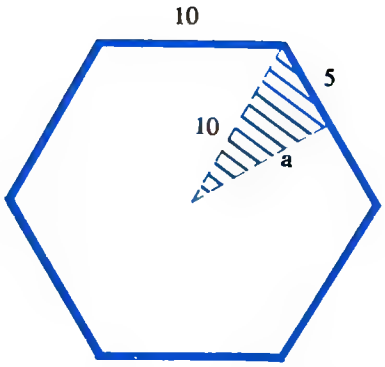
$$S = \frac{P \cdot a}{2}$$

NOTA.—Entiéndase por apotema al segmento que une el centro de la figura con el punto medio de cualquier lado.

NOTA.—En el caso de un exágono como el de la figura téngase en cuenta que la longitud de su lado es equivalente al radio de la circunferencia circunscrita a él, es decir:



Ej.: Hallar el área de un exágono regular de 10 m de lado.



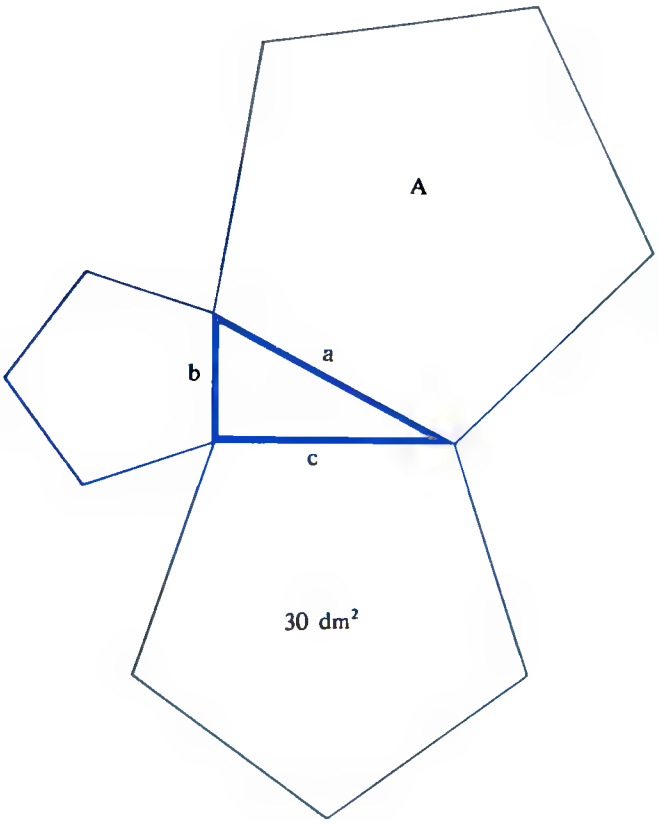
En el triángulo rayado de la figura, mediante la aplicación de

un teorema de Pitágoras, calculamos la apotema, necesaria para calcular el área.

$$10^2 = 5^2 + a^2;\ 100 = 25 + a^2;\ 75 = a^2;\ a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ m$$

$$S = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\ m^2$$

Ej.: Sobre cada lado de un triángulo rectángulo se construye un pentágono regular. El construido sobre el cateto c tiene de área 30 dm^2. Hallar el área del pentágono construido sobre la hipotenusa sabiendo que la razón del cateto c al b es 3/5.



Es evidente que los pentágonos construidos sobre los lados c y a del triángulo rectángulo son semejantes, por tener sus ángulos iguales, ya que son regulares. Pues bien, la razón de las áreas de ambos están en proporción con el cuadrado de su razón de semejanza.

Vamos pues a hallar la razón de semejanza de ambos, previo cálculo del lado a en función del lado c.

$$\frac{c}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow b = \frac{5c}{3}$$

Aplicando un teorema de Pitágoras, calculamos a en función de c.

"A medida que una disciplina matemática se separa más y más de su fuente empírica (...), está más cercada de peligros. Se va haciendo más y más esteticismo puro, se convierte más y más en un arte por el arte. Esto no es necesariamente malo, si el campo en cuestión está rodeado de otros campos relacionados con él que tengan todavía conexiones empíricas más cercanas (...). Pero existe un grave peligro de que este campo se desarrolle a lo largo de las líneas de menor resistencia, de que la corriente, tan lejos de su fuente, venga a separarse en una multitud de ramas insignificantes y de que la disciplina venga a convertirse en una masa desorganizada de detalles y complejidades. En otras palabras, a gran distancia de su fuente empírica, o bien después de mucha incubación abstracta, un campo matemático está en peligro de degeneración."

J. von Neumann

"El Señor a quien pertenece el oráculo de Delfos no revela ni esconde, sino provee símbolos."

Heráclito

GUANTES

Parecido al antiguo problema de los calcetines.

En un cajón hay media docena de guantes blancos y otra media docena de guantes negros, todos revueltos.

En el momento de salir de casa se corta la luz. A oscuras tenemos que meter la mano en el cajón, sacar cierto número de guantes mínimos y tener un par y del mismo color.

¿Cuántos guantes mínimos (repito) tenemos que sacar, para que cuando salgamos a la calle tengamos un par del mismo color?

LA SOLUCION EN PAG. 496.

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = \left(\frac{5c}{3}\right)^2 + c^2 \rightarrow a^2 = \frac{25c^2}{9} + c^2$$

$$a^2 = \frac{25c^2 + 9c^2}{9} \rightarrow a^2 = \frac{34c^2}{9} \rightarrow a = \sqrt{\frac{34c^2}{9}} \rightarrow a = \frac{c\sqrt{34}}{3}$$

Luego la razón de semejanza de ambos es:

$$K = \frac{c}{a} = \frac{c}{\frac{c\sqrt{34}}{3}} \rightarrow K = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Luego:

$$\frac{30}{A} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 \rightarrow \frac{30}{A} = \frac{9}{34} \rightarrow A = \frac{30 \cdot 34}{9} = \frac{1020}{9} = \frac{340}{3}\ dm^2$$

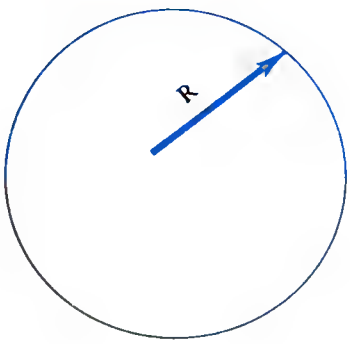
20.–CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

A.–Concepto.–Cualquier circunferencia es una línea curva cerrada y se entiende por tal al lugar geométrico de los puntos que guardan la misma distancia de uno fijo llamado **centro.** A la longitud del centro a cualquiera de los puntos del lugar se le llama **radio.**

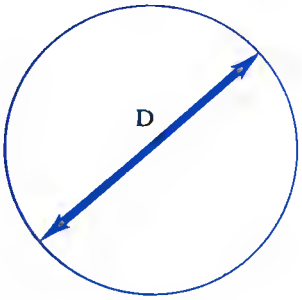
lugar geométrico = = circunferencia

B.–Líneas que se consideran en una circunferencia.

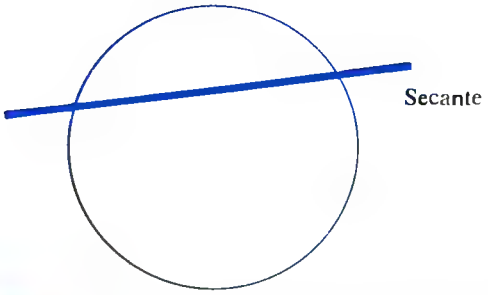
– Radio: Es el segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.



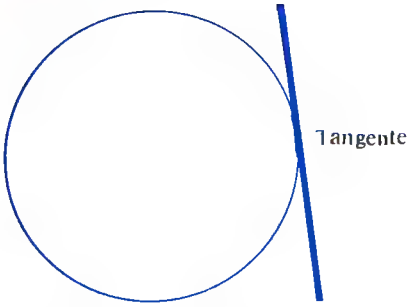
– **Diámetro:** Es el segmento que une dos puntos opuestos de una circunferencia y pasando por su centro.



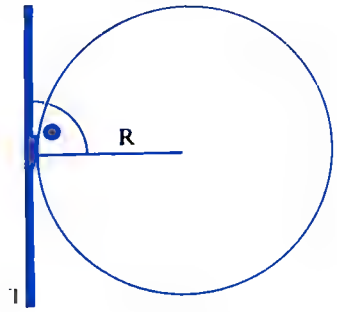
– **Secante:** Es la línea recta que corta a la circunferencia en dos puntos.



– **Tangente:** Es la línea recta que solamente tiene un punto común con la circunferencia.



Cualquier tangente en un punto cualquiera a la circunferencia posee la propiedad de ser perpendicular en el punto de tangencia con el radio correspondiente.



Siendo el agua una sustancia imprescindible para la vida del hombre, es natural que, desde los albores de la humanidad, aquél instalase sus campamentos a la orilla de ríos, más o menos caudalosos. Más adelante se hizo necesario habitar terrenos alejados de cauces fluviales y entonces apareció el problema de trasladar el agua de una forma continuada a una ciudad. Los romanos perfeccionaron esta técnica y fueron famosos constructores de acueductos; muchos de ellos se conservan aún en los países que dominaron. Sus conducciones fueron calculadas con una pendiente uniforme que obligaba a deslizarse el agua de una manera suave en virtud de la ley de gravedad. Este cálculo tiene que ser muy preciso para mantener una velocidad lenta en el agua, ya que este líquido se impulsa a sí mismo de forma incontenible con sólo aumentar el desnivel por donde circula.

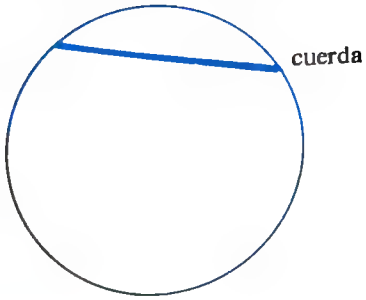
En la ingeniería moderna el tipo original de acueducto ha sido reemplazado por tubos de acero y los desniveles se salvan adoptando éstos la forma de sifón, desconocida por los antiguos.

Hoy las aguas que se consumen, aun las de apariencia más pura, contienen abundantes microbios procedentes de la atmósfera o del suelo por el cual hen discurrido. Algunas veces son inofensivos pero otras veces resultan muy peligrosos para la salud del hombre.

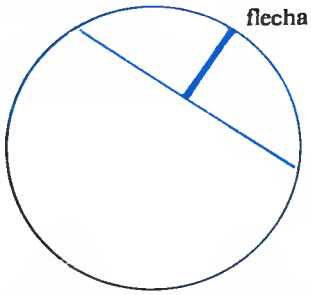
Si el agua está contaminada, su consumo puede acarrear terribles epidemias.

La depuración del agua para beber comprende una cuidadosa filtración haciéndola pasar primero por un filtro de arena en los que se superponen, de arriba a abajo, capas sucesivas de cantos rodados, grava, gravilla y arena fina. Al hecer pasar el agua, ésta deja aquí una parte de sus impurezas; más adelante se la mantiene en estanques convenientemente agitados por un suave movimiento mecánico con objeto de facilitar su oxigenación; posteriormente se le añade cloro en la proporción adecuada y se envía a las conducciones caseras para el uso normal, considerando que se requieren 200 litros de agua por persona y día.

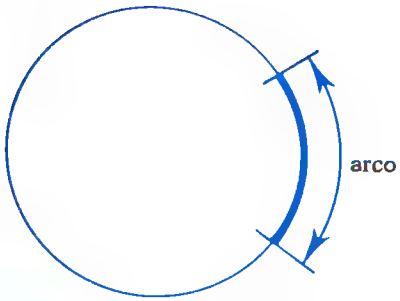
— **Cuerda:** Es el segmento que une dos puntos cualquiera de una circunferencia.



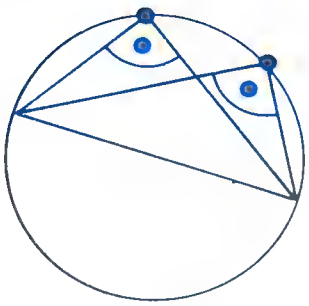
— **Flecha o Sagital:** Es el segmento perpendicular en su punto medio a una cuerda cualquiera de la circunferencia.



— **Arco:** Arco de una circunferencia es una porción cualquiera de la circunferencia en cuestión.

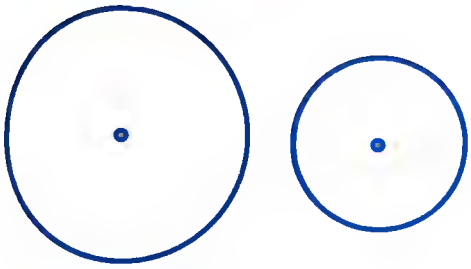


— **Arco capaz de 90°:** En una circunferencia, es aquel que va desde cualquier punto de la circunferencia al diámetro de ésta. Su formación produce siempre un triángulo rectángulo.

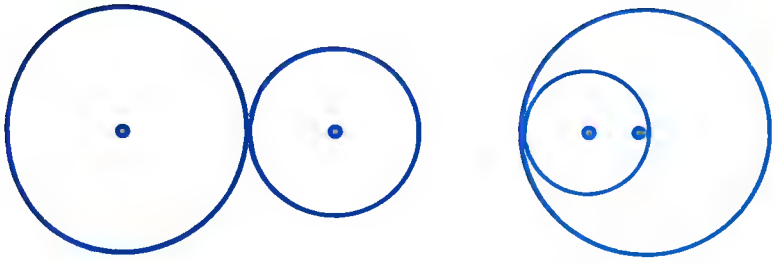


C.—Posiciones relativas de dos circunferencias.

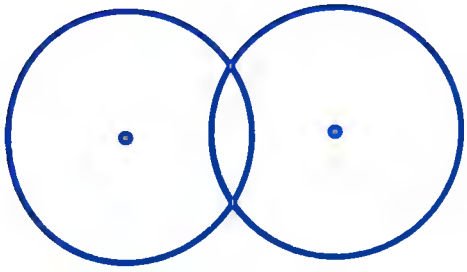
— **Exteriores.** Cuando no tienen ningún punto en común.



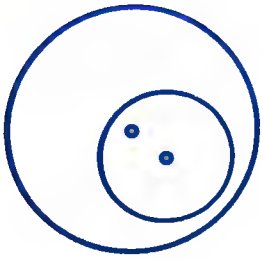
— **Tangentes.** Cuando sólo tienen un punto en común.



— **Secantes.** Cuando tienen dos puntos comunes.



— **Interiores.** Cuando no tienen ningún punto en común.



Las matemáticas se han convertido poco a poco en algo que se parece a un mecano, cuyas piezas elementales tienen la finalidad de favorecer un sistema de economía en el estricto sentido de la palabra. Hoy, el públio en general tiene una sensación muy particular de las matemáticas; le parece una ciencia lineal, sin fallos, que puede seguirse de una forma precisa, sin que sea necesario el uso de la imaginación.

Otra idea falsa es pensar que se había alcanzado el fin de esta materle.

Muchos se preguntan: ¿será posible encontrar cosas nuevas en las matemáticas?

En la actualidad, la constitución de un lenguaje nuevo y unas estructuras comunes permiten que nos orientemos rápidamente en terrenos muy variados. Si un estudiante de hoy se ve obligado a iniciarse en una rame concrete de esta ciencie, que todavíe no domina, puede conseguirlo en tres o cuatro meses y esto es posible porque existen unas cleves y disposiciones comunes, permitiéndonos que nos orientemos rápidamente en terrenos muy variados.

A duro y medio la sardina y media.

¿Cuántos duros y medio serán 9 sardinas y media?

Si una sardina y media cuestan un duro y medio, es bien fácil deducir que una sardina costará un duro u por supuesto 9 sardinas y media costarán nueve duros y medio.

Este es uno de los problemas de pega (que no es tal) más antiguo; pero aquí todo hay que demostrarlo por procedimientos matemáticos:

$1\frac{1}{2}$ sardinas cuestan $1\frac{1}{2}$ duros

$9\frac{1}{2}$ sardinas cuestan x duros

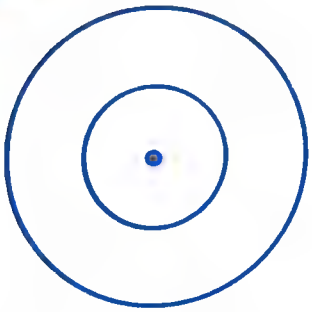
Una regla de tres simple, donde:

$$e = \frac{9\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$$

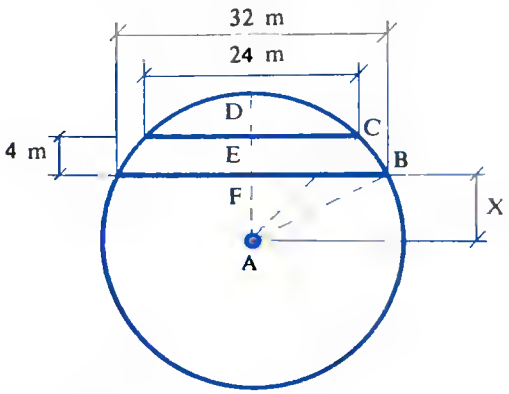
(uno y medio que multiplica y uno y medio que divide, se anulan) de donde

$e = 9\frac{1}{2}$ duros.

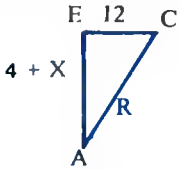
— **Concéntricas** (Con el mismo centro).



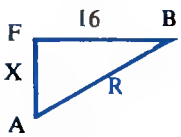
Ej.: En una circunferencia se trazan dos cuerdas paralelas, cuyas longitudes son 24 m y 32 m respectivamente, y su distancia es de 4 m. Hallar el radio de la circunferencia a la que pertenecen y la distancia a la que están del centro de ésta.



llamando x a la distancia $\overline{AF}$, podemos aplicar un teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos $\widehat{ACE}$ y $\overline{ABF}$.



$$R^2 = (4 + x)^2 + 12^2$$



$$R^2 = x^2 + 16^2$$

$$\Big\} \; (4 + x)^2 + 12^2 = x^2 + 16^2$$

Operando obtendremos:

$$16 + x^2 + 8x + 144 = x^2 + 256 \quad ; \quad 8x = 96; \quad x = \frac{96}{8} = 12 \text{ m.}$$

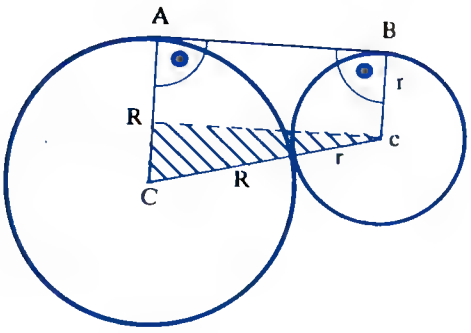
Así que el radio de la circunferencia lo podemos obtener sustituyendo x en cualquiera de las ecuaciones primitivas:

$$R^2 = x^2 + 16^2 \rightarrow R = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ m.}$$

La distancia del centro de la circunferencia a las cuerdas es pues:

$$\overline{AF} = x = 12 \text{ m.} \qquad \overline{AE} = 4 + x = 4 + 12 = 16 \text{ m.}$$

Ej.: Dos circunferencias son tangentes exteriores y la distancia entre sus centros es 36 m. Sabiendo que la tangente común tiene una longitud de 28 m., calcular los radios de ambas.



$\overline{CC} = 36$ m.
$\overline{AB} = 28$ m.

Plantearemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} R + r = 36 \text{ (véase figura)} \\ 36^2 = 28^2 + (R - r)^2 \text{ (en triángulo rayado)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} R + r = 36 \\ 1296 = 784 + (R - r)^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} R + r = 36 \\ 512 = (R - r)^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} R + r = 36 \\ R - r = \sqrt{512} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} R + r = 36 \\ R - r = 16\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

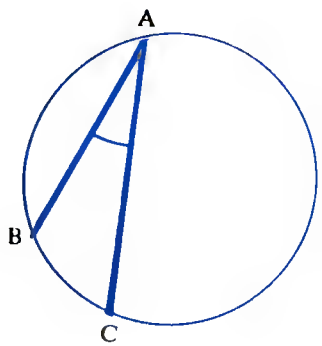
$$2R = 36 + 16\sqrt{2}$$

$R = 18 + 8\sqrt{2}$ m.; y $r = 36 - R = 36 - (18 + 8\sqrt{2}) = 18 - 8\sqrt{2}$ m.

D.—Angulos en la circunferencia

Angulo inscrito. Es aquel que posee las siguientes características:

- Su vértice está en la circunferencia.
- Sus lados son cuerdas.
- Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales.
- La amplitud de un ángulo inscrito equivale a la mitad de la amplitud del arco que abarca.



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

SOLUCION AL PROBLEMA CUADRANGULAR DE FUTBOL DE LA PAGINA 45B:

A contra	B = 0–0	A - 4 puntos
A "	C = 0–0	
A "	D = 1–0	
B "	A = 0–0	B - 4 puntos
B "	C = 0–0	
B "	D = 1–0	
C "	A = 0–0	C - 3 puntos
C "	B = 0–0	
C "	D = 1–1	
D "	A = 0–1	D - 1 punto
D "	B = 0–1	
D "	C = 1–1	

CURIOSIDADES

Alguna vez habréis oído eso de "Toda regla tiene su excepción". ¿Es cierto eso? Vamos a verlo:

"Toda regla tiene su excepción" es una regla, al ser una regla **tiene su excepción.**

Entonces podemos decir que "no toda regla tiene su excepción".

También podemos decir que se trata de una afirmación, la cual se contradice a sí misma.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL COCHE DE LA PAGINA 452:

Hice **bien** matemáticamente, ya que el cálculo de posibilidades de que la multa venga en lunes es:

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0.00002413756$$

Así pues, esta posibilidad es tan baja que justifica mi decisión de llevar este día el coche al aparcamiento, ya que la policía municipal haría un recorrido periódico desde (por ejemplo) el centro de Madrid hasta una zona del extrarradio y cada día empezaba a multar a partir de donde se había quedado el día anterior. Al lunes siguiente, empezar por el mismo sitio del centro, y así sucesivamente.

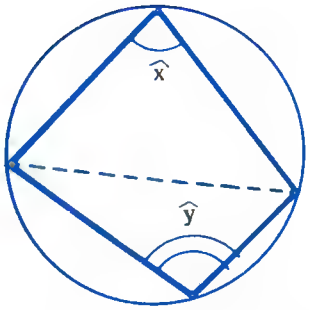
Ahora, con la grúa, la zona de la O.R.A. y demás, ya no se puede hacer.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA COMPRA DE LA FERRETERIA DE LA PAGINA 460:

Lo que compró fueron tres números para colocar en su misma casa, por ejemplo. Tres números, a 200 ptas. cada pieza, son 600 pesetas.

Esto nos enseña a leer cuidadosamente el enunciado de un problema, analizándolo debidamente.

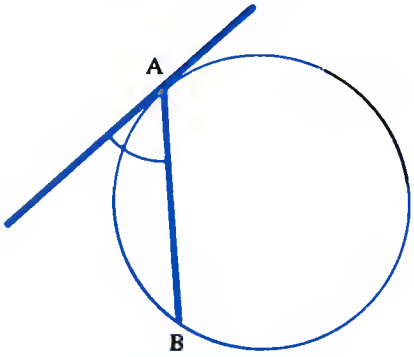
- Dos ángulos inscritos en cada uno de los arcos que una cuerda determina son suplementarios.



$$\hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$

— **Angulo semiinscrito** es aquel que posee las siguientes características:

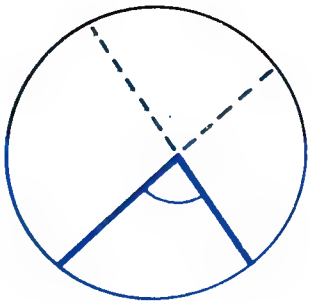
- Su vértice está en la circunferencia.
- Uno de sus lados es secante a la circunferencia y el otro tangente.
- La amplitud de un ángulo semiinscrito equivale a la mitad de la amplitud del arco que abarca.



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

— **Angulo interior** es aquel que posee las siguientes características:

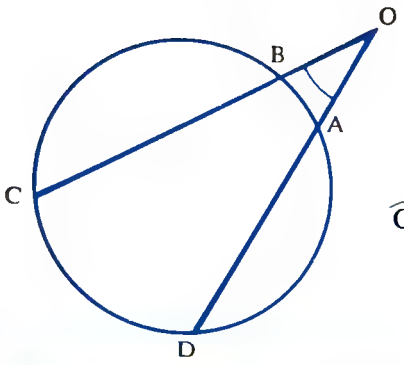
- Su vértice es interior a la circunferencia.
- Sus lados son segmentos de cuerdas.
- La amplitud de un ángulo interior equivale a la semisuma de los arcos que abarca éste, y no opuesto por el vértice.



$$\hat{O} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

– **Angulo exterior** es aquel que posee las siguientes características:

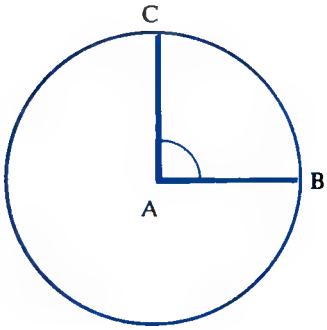
- Su vértice es exterior a la circunferencia.
- Sus lados son secantes.
- La amplitud de un ángulo exterior equivale a la semidiferencia de las amplitudes de los arcos abarcados por él.



$$\widehat{O} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$$

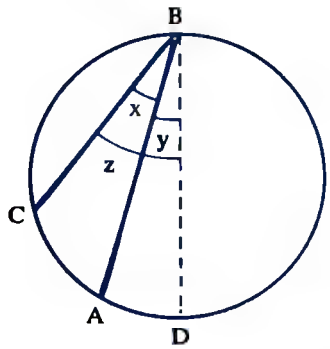
– **Angulo central** es aquel que posee las siguientes condiciones:

- Su vértice es el centro de la circunferencia.
- Sus lados son segmentos de cuerdas que pasan por el centro de la circunferencia.
- La amplitud de un ángulo central equivale a la amplitud del arco que abarca.



$$\widehat{A} = \widehat{BC}$$

Ej.: En la figura siguiente:



La meta de todo ser humano debe de ser conseguir una ocupación que nos proporcione felicidad. Para conseguirlo se impone dedicar toda nuestra voluntad hacia aquel trabajo para el que tengamos más aptitud.

Aun dentro de éste tratemos de dedicarnos a aquella parte que más interés nos despierte.

De este modo a la satisfacción que produce la actividad agradable sumaremos el placer producido por el mayor rendimiento, con lo que tendremos dos factores positivos en esta natural aspiración por una aceptable felicidad cotidiana. Al vivir naturalmente en el seno de una sociedad la profesión debe de ser elegida con arreglo a las necesidades sociales, inteligentemente debemos encaminar nuestros deseos o los de nuestros hijos hacia profesiones que adaptadas a nuestras posibilidades tenga en sí unas expectativas reales de colocación o de desarrollo individual. El estudio de las matemáticas es una base muy importante.

"A medida que las ciencias (...) llegaron a ser más exactas, exigieron ininterrumpidamente más y más de la inventiva matemática y fueron responsables principales de una gran parte de la expansión enorme de todas las matemáticas desde 1637. Asimismo, a medida que la industria y las invenciones llegaron a ser más y más científicas, después de la Revolución Industrial de la última parte del siglo XVIII y la primera parte del XIX, también ellas estimularon la creatividad matemática (...). La curva de la productividad matemática con relación al tiempo se dispara hacia lo alto con rapidez cada vez mayor..."

E. T. Bell

"En lugar alguno mejor que en el análisis combinatorio puede verse la falacia contenida en la bien conocida sentencia de Kronecker: «Dios creó los números naturales; lo demás es obra nuestra». Una descripción más acertada sería: «Dios creó el infinito, y el hombre, incapaz de comprenderlo, tuvo que inventar los conjuntos finitos»."

G. C. Rota

Se pide: a) Si $\widehat{AC} = 63^\circ\ 21'\ 46''$, hallar $\widehat{ABC}$

b) Si $\hat{x} = 37^\circ\ 11'\ 5''$ e $\hat{y} = 16^\circ\ 33'\ 28''$, hallar: $\widehat{AC}$, $\widehat{DA}$ y $\widehat{BC}$.

a) En este caso el ángulo $\widehat{ABC}$ es inscrito, luego

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{63^\circ\ 21'\ 46''}{2} = 31^\circ\ 40'\ 53''$$

b) También estamos ante ángulos inscritos.

$$\hat{x} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad ; \quad 37^\circ\ 11'\ 5'' = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad ; \quad \widehat{AC} = 74^\circ\ 22'\ 10''$$

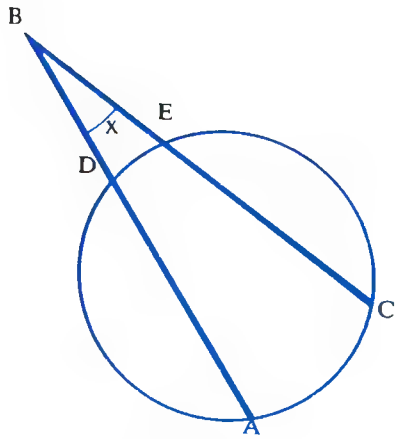
$$\hat{y} = \frac{\widehat{DA}}{2} \ ; \ 16^\circ\ 33'\ 28'' = \frac{\widehat{DA}}{2} \ ; \ \widehat{DA} = 32^\circ\ 66'\ 56'' = 33^\circ\ 6'\ 56''$$

$$\widehat{BC} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{AD}) = 180^\circ - (74^\circ\ 22'\ 10'' + 33^\circ\ 6'\ 56'') =$$

$$= 180^\circ - 107^\circ\ 28'\ 66'' = 180^\circ - 107^\circ\ 29'\ 6'' =$$

$$= 179^\circ\ 59'\ 60'' - 107^\circ\ 29'\ 6'' = 72^\circ\ 30'\ 54''$$

Ej.: En la siguiente figura, hallar el ángulo $\hat{x}$, sabiendo que $\widehat{AC} = 120^\circ$ y $\widehat{DE} = 20^\circ$.



Estamos ante un ángulo exterior, luego,

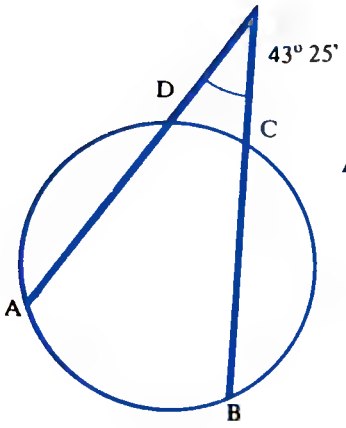
$$\hat{x} = \frac{120 - 20}{2} \quad \frac{100}{2} = 50^\circ$$

Ej.: Cuánto mide un ángulo semiinscrito, que abarca entre sus lados un arco de $187^\circ\ 26'$

$$A = \frac{187^\circ\ 26'}{2} = 93^\circ\ 43'$$

Ej.: Un ángulo exterior a una circunferencia mide $43^\circ\ 25'$ y sus lados determinan en la misma dos arcos que suman $213^\circ\ 30'$. Hallar estos arcos.

Formaremos un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, cuyas incógnitas son los arcos pedidos.



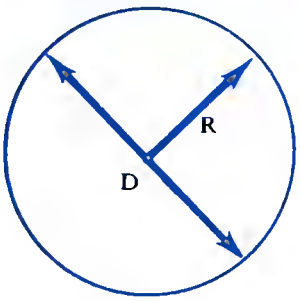
$$\left.\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{CD} &= 213^\circ 30' \\ 43^\circ 25' &= \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{CD} &= 213^\circ 30' \\ \widehat{AB} - \widehat{CD} &= 86^\circ 50' \end{aligned}\right\}$$

$$2\,\widehat{AB} = 299^\circ 80' \rightarrow 2\,\widehat{AB} = 300^\circ 20' \rightarrow \widehat{AB} = \frac{300^\circ 20'}{2} = 150^\circ 10'$$

$$\widehat{CD} = 213^\circ 30' - \widehat{AB} = 213^\circ 30' - 150^\circ 10' = 63^\circ 20'$$

E.—Longitud de una circunferencia



$$L = 2\,\pi R = D\pi$$

NOTA: $\pi = 3,\ 14\ 16...$

Ej.: Hallar la longitud de una circunferencia de 10 m de radio.

$$L = 2\,\pi R = 2\,\pi \cdot 10 = 20\,\pi \text{ m.}$$

Ej.: Una circunferencia tiene de longitud 178,98 cm. Averiguar cuánto dista del centro de la circunferencia un punto tal que la tangente trazada a ella desde dicho punto mide 38 cm.

En el triángulo rectángulo rayado en la figura, previo cálculo del radio de la circunferencia, podemos obtener la distancia pedida d, mediante la aplicación de un teorema de Pitágoras.

Ignacio Zuloaga, gran pintor español nacido en Eibar el 26 de julio de 1870, luchó con la presión familiar que quería verlo convertido en un eficiente ingeniero de minas. A los diecisiete años visita el Museo del Prado y conoce la obra de Velázquez y del Greco. Sus pinturas de temas sociales muy al uso en esas épocas son admitidas en la Exposición de Bellas Artes de Madrid; en vista de esta creciente vocación su familia lo envía a Italia, donde siguió pintando cuadros realistas, viajó a Inglaterra y a su vuelta se instala en Sevilla, donde incluso llegó a actuar de torero. En 1896 termina su etapa andaluza y comienza otro capítulo fundamental en su obra, el descubrimiento de Castilla, introduce en su paleta toda una gama de colores ocre y tostados. En Segovia compra la "Casa del Crimen", donde instala un estudio que utiliza en otoño, pasando el resto del año en Paris y en Madrid. Su producción pictórica fue muy abundante, dedicando sus últimos años al retrato. Murió en Madrid el 23 de octubre de 1945.

El secuestrador de un avión, después de aterrorizar al pasaje y a la tripulación, puso dos condiciones para abandonarlo.

1.ª condición: Que le dieran inmediatamente cincuenta millones de pesetas.

2.ª condición: La inmediata entrega de "dos paracaídas".

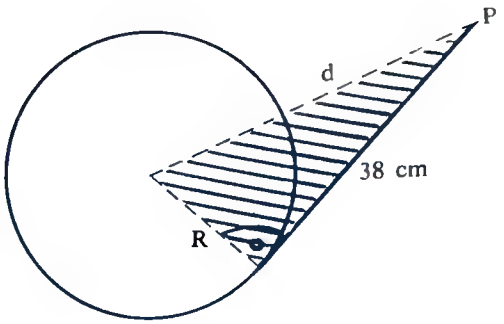
De no ser así volaría el avión con todas las personas dentro.

Las autoridades accedieron a su solicitud.

Obligó posteriormente a los pilotos a despegar rumbo a otra nación y a medio del trayecto, se lanzó en paracaídas. Todos en el aeropuerto lo vieron normal.

Donde existía anormalidad era en ¿por qué pidió "dos paracaídas"?

Explícamelo. Si no lo sabes, te lo diremos (pág. 512).



Calculamos, pues, el radio:

$$L = 2\pi R \rightarrow 178{,}98 = 2\pi R \rightarrow R = \frac{178{,}98}{2 \cdot 3{,}14} = 28{,}5 \text{ cm.}$$

Así que la distancia pedida es:

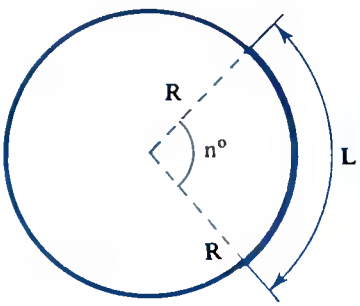
$d^2 = 38^2 + 28{,}5^2$; $d^2 = 1444 + 812{,}25$; $d^2 = 2256{,}25$;

$d = \sqrt{2256{,}25}$; $d = 47{,}5$ cm.

F.—Longitud de un arco de circunferencia

Mediante una sencilla regla de tres podemos obtener la fórmula que nos permita calcular una porción de arco de circunferencia:

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \text{——} 2\pi R \\ n^\circ \text{——} L \end{array}\right\} \rightarrow \frac{360}{n^\circ} = \frac{2\pi R}{L} \rightarrow L = \frac{2\pi R n^\circ}{360} = \frac{\pi R n^\circ}{180}$$

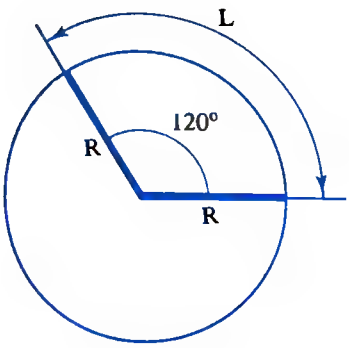


$$L = \frac{\pi R n^\circ}{180}$$

Ej.: Hallar la longitud de un arco de circunferencia de 5 m de radio al que le corresponde un ángulo central de 60°:

$$L = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 60}{180} = \frac{5\pi}{3} \text{m}$$

Ej.: Hallar el radio de un arco de 120°, sabiendo que la longitud de este arco excede en 4 m a la de su radio.



$$\left.\begin{array}{l} L = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 120}{180} \\ L = R + 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} L = \dfrac{\pi R \cdot 2}{3} \\ L = R + 4 \end{array}\right\}$$

$$R + 4 = \frac{2\pi R}{3}; \quad 3R + 12 = 2\pi R; \quad 3R - 2\pi R = -12;$$

$$R(3 - 2\pi) = -12; \quad R = \frac{-12}{3 - 2\pi} = \frac{12}{2\pi - 3} \text{ m}$$

Ej.: La longitud de un arco de circunferencia de 40° 36' es de 157 cm. ¿Cuál es la amplitud de otro arco de la misma circunferencia que tenga de longitud 117,75 cm?

Inicialmente necesitamos conocer el radio de la circunferencia, dato que obtendremos con las primeras condiciones del problema:

$$L = \frac{\pi R\, n^\circ}{180}; \quad 157 = \frac{\pi \cdot R \cdot 40^\circ\, 36'}{180}$$

NOTA.—Téngase en cuenta el pasar el dato 40° 36' todo a grados, para operar con facilidad.

$$40^\circ\, 36' = 40^\circ + \left(\frac{36}{60}\right)^\circ = \frac{2.400 + 36}{60} = \frac{2.436}{60} = \left(\frac{203}{5}\right)^\circ$$

$$157 = \frac{\pi \cdot R \cdot \dfrac{203}{5}}{180}, \quad 157 = \frac{\pi \cdot R \cdot 203}{900}; \quad R = \frac{900 \cdot 157}{203 \cdot \pi} \text{ cm.}$$

Así que calculado el radio, podemos calcular la amplitud del arco pedido:

$$117{,}75 = \frac{\pi = \dfrac{900 \cdot 157}{203 \cdot \pi} \cdot n^\circ}{180}; \quad n^\circ = \frac{117{,}75 \cdot 180 \cdot 203}{900 \cdot 157} =$$

$$= \frac{4302585}{141300} = 30{,}45^\circ = 30^\circ\, 27'$$

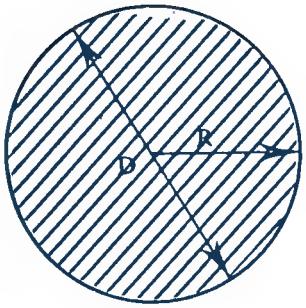
G.—Area de un círculo

El área de un círculo es la superficie del recinto limitado por la circunferencia.

Si todos los habitantes del planeta tierra fuéramos de la misma raza, seguramente se habrían evitado los dolorosos enfrentamientos que se han sucedido y que hoy todavía padecemos. Pero lo cierto es que estamos divididos en múltiples subdivisiones de nuestra especie, cuyos caracteres diferenciales se transmiten por herencia. Su distinción primordial se establece no sólo por el color de la piel, sino por los rasgos, estructura del pelo, forma de los ojos, perfil facial, bóveda craneal, etc. Linneo catalogó al "Homo Sapiens" en cuatro tipos según rasgos físicos y características psicológicas que denominó: Americano, Europeo, Asiático y Africano. Cuvier las agrupó en tres tipos, Blanca, Amarilla y Negra, para más tarde Blumen Bach establecer las cinco razas principales que son: caucasiana, mogólica, etiópica, americana y malaya, que para mayor precisión los antropólogos las subdividen en grupos parciales, aunque una clasificación universal no ha podido completarse aún.

Desde que apareció sobre la superficie terrestre, el hombre no ha dejado de crear. Este noble proceso es una de las características fundamentales de la vida humana y no se ha monopolizado en un único sentido, sino que abarca una amplia gama de saberes y de arte. De las bellas artes quizás sea la literatura uno de los medios más nobles para expresar en forma permanente el contenido de su espíritu. El escritor y el poeta se basta con el medio de expresión más natural en el hombre: el lenguaje.

El escritor expresa sus inquietudes, canta a sus antepasados, ensalza las hazañas heroicas de su patria, pudiendo así distinguir entre el fondo y la forma: la forma es la manera de expresarse mientras que el contenido que queremos transmitir a nuestros lectores es el fondo. Dentro de la expresión literaria hay variedad de géneros, pudiendo englobarla en tres grandes apartados. Poesía, didáctica y oratoria.



$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Ej.: Hallar el área de un círculo de 2 m de radio.

$$S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ m}^2$$

Ej.: La razón entre los radios de los círculos es igual a 2/3; la suma de las áreas de ellos es 367,38 m. Hallar sus áreas.

Plantearemos un sistema de ecuaciones, llamando R y r a los radios de los dos círculos.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \\ S + s' = 367{,}38 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \\ \pi R^2 + \pi r^2 = 367{,}38 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \\ \pi (R^2 + r^2) = 367{,}38 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \\ R^2 + r^2 = 117 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} R = \frac{3r}{2} \\ \left(\frac{3r}{2}\right)^2 + r^2 = 117;\ \frac{9r^2}{4} + r^2 = 117; \end{array}\right.$$

$$9r^2 + 4r^2 = 1.053; \quad 13r^2 = 1.053; \quad r^2 = \frac{1.053}{13} = 81$$

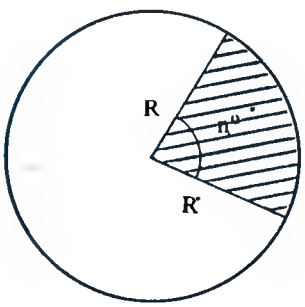
$$r = \sqrt{81}; \quad r = 9 \text{ m} \rightarrow R = 13{,}5 \text{ m}$$

21.—FIGURAS CIRCULARES

En cualquier círculo se produce la formación de figuras que es necesario conocer.

A.—Sector circular

Es la porción de círculo comprendido entre dos radios. La obtención de su área se puede realizar mediante una sencilla regla de tres.



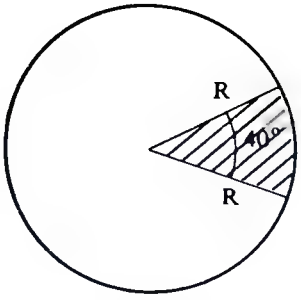
$$\left.\begin{array}{ll} 360^\circ & \text{——} \ \pi R^2 \\ n^\circ & \text{——} \ S \end{array}\right\} \rightarrow S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360}$$

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360}$$

Ej.: Hallar el área de un sector circular de 30° de amplitud en una circunferencia de 5 m de radio.

$$S = \frac{\pi R^2 n^o}{360} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi \cdot 25}{12} = \frac{25}{12}\pi \text{ m}^2$$

Ej.: Un sector circular tiene 8 cm² de área y el ángulo central correspondiente mide 40°. Calcular el área del círculo a que pertenece el sector y la longitud del arco que le sirve de base.



$S = 8 \text{ cm}^2$

Calculemos el radio del círculo con el área del sector.

$$S = \frac{\pi R^2 \cdot n^o}{360} \rightarrow 8 = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 40}{360} \rightarrow R^2 = \frac{8 \cdot 360}{40 \cdot \pi}$$

$$R^2 = \frac{2.880}{40\pi} \rightarrow R = \sqrt{\frac{2.880}{40\pi}} \simeq 4{,}78 \text{ cm}$$

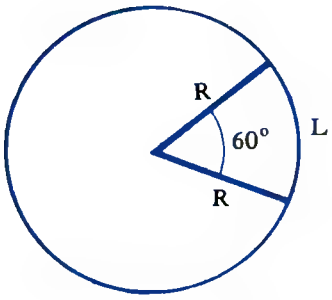
Así que el área del círculo es:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{2.880}{40\pi} = 72 \text{ cm}^2$$

Y la longitud del arco base es:

$$L = \frac{\pi R n^o}{180} \simeq \frac{\pi \cdot 4{,}78 \cdot 40}{180} \simeq \frac{600{,}36}{180} \simeq 3{,}33 \text{ cm}$$

Ej.: Averiguar el radio de un sector circular de 60°, sabiendo que la longitud de su contorno mide 18,28 cm.



$$R + R + L = 18{,}28$$

$$R + R + \frac{\pi R 60}{180} = 18{,}28$$

El Renacimiento se desarrolló en Italia en el siglo XIV, fue un movimiento cultural que afectó principalmente a la literatura y a las artes plásticas. En España fueron los Reyes Católicos sus impulsores, la reina Isabel se entusiasmó tanto con esta vuelta a los clásicos latinos que ella misma aprendió esta lengua, recibía las clases de Beatriz Galindo, llamada "La Latina". Antonio de Nebrija fue el humanista más destacado de este tiempo, nació en 1441 en Lebrija (Sevilla), estudió en Salamanca y durante varios años en Italia, a su regreso a España donde fue nombrado cronista real.

El Cardenal Cisneros le encargó la revisión del texto latino de la Biblia Políglota Complutense, en la preparación e impresión de esta obra se emplearon 13 años, consta de seis volúmenes en folio, está escrita en hebreo, griego, caldeo y latín, sólo se imprimieron seiscientos ejemplares.

Otra gran obra de Antonio de Nebrija fue el Arte de la Lengua Castellana, primera Gramática Española, publicada en 1492 para fijar definitivamente las normas por las que se regía nuestra lengua.

A un examen de lógica se presentaron 19 alumnos. Aprobaron todos los albaceteños que representaban el 10 por ciento del total de aprobados.

Este problema se remite a dos preguntas:

1.ª ¿Cuántos aprobaron?

2.ª ¿Cuántos eran de Albacete?

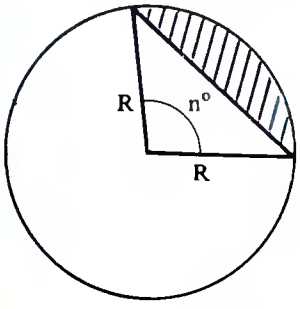
LA SOLUCION EN PAGINA 512.

$$2R + \frac{188,4R}{180} = 18,28; \quad 360R + 188,4R = 3.290,4$$

$$548,4R = 3.290,4; \quad R = \frac{3.290,4}{548,4} = 6 \text{ cm}$$

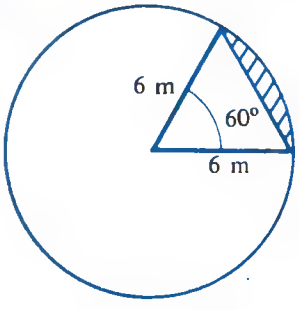
B.—Segmento circular

Es la función de área comprendida entre un sector circular y el triángulo que forma éste con su área correspondiente.



$$S = S_{sector} - S_{triángulo}$$

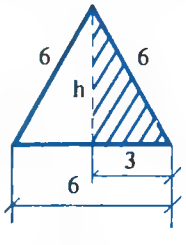
Ej.: Hallar el área de un segmento circular de 6 m de radio, cuyo ángulo central vale 60°.



$$S_{segmento} = S_{sector} - S_{triángulo}$$

$$S_{sector} = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60}{360} = \frac{36\pi}{6} = 6\pi \text{ m}^2$$

Para hallar la superficie del triángulo habrá que tener en cuenta, según los datos que éste es equilátero, luego:



$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

En el triángulo rayado de la figura, por Pitágoras podemos calcular la altura necesaria para obtener su área.

$$6^2 = h^2 + 3^2; \quad 36 = h^2 + 9; \quad h^2 = 27; \quad h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

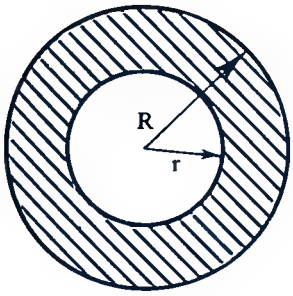
$$S = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Luego la superficie del segmento circular es:

$$S_{segmento} = 6\pi - 9\sqrt{3}\ m^2$$

C.—Corona o anillo circular

Es la porción de área comprendida entre dos circunferencias concéntricas.



$$S = \pi R^2 = \pi r^2 = \pi\,(R^2 - r^2)$$

Ej.: Hallar el área de una corona circular siendo los radios de las circunferencias que la forman de 10 m y 6 m.

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 6^2 = 100\pi - 36\pi = 64\pi\ m^2$$

Ej.: Hallar el área de una corona circular, sabiendo que la circunferencia que limita exteriormente tiene una longitud de 157 m y que la razón de los radios de las dos circunferencias es 5/2.

Con la longitud de la circunferencia exterior obtenemos el radio de ésta:

$$L = 2\pi R \rightarrow 157 = 2\pi R \rightarrow R = \frac{157}{2\pi} = 25\ m$$

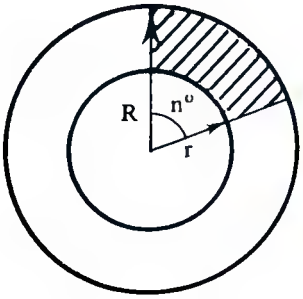
Luego la razón de los radios es: $\frac{R}{r} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{25}{r} = \frac{5}{2} \rightarrow r\,\frac{25 \cdot 2}{5} = 10\ m$

Luego su área es

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 10^2 = 625\pi - 100\pi = 525\pi\ m^2$$

D.—Trapecio circular

Es la porción de área comprendida entre una corona circular y dos radios:

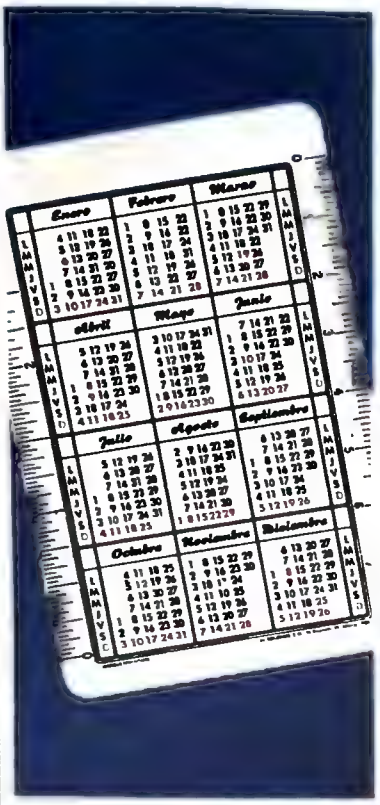


$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360} - \frac{\pi r^2 n^\circ}{360} = \frac{\pi n^\circ}{360}(R^2 - r^2)$$

La Mitología griega no eleva a sus dioses muy por encima de los hombres, sino que los sitúa en un plano parecido, con pasiones y rencores, son guerreros, libertinos y mortales; únicamente están libres de la vejez y de las enfermedades, y de tal modo se mezclan en la vida y hazañas de los hombres, que todos los relatos mitológicos griegos están plagados de estas mezcolanzas de hombres y dioses, en las que no pocas veces son éstos burlados y vencidos por aquéllos.

Las doce divinidades más importantes que de los griegos llegaron a los romanos son las siguientes:

1. ZEUS (Júpiter) = Dios Supremo.
2. HERA (Juno) = Esposa de Zeus.
3. POSEIDON (Neptuno) = Dios de las aguas.
4. APOLO (Febo) = Dios de la inteligencia, identificado con el Sol.
5. ATENEA (Minerva) = Diosa de la sabiduría.
6. AFRODITA (Venus) = Diosa del amor.
7. ARES (Marte) = Dios de la guerra.
8. HEFAISTOS (Vulcano) = Dios de las artes útiles.
9. HESTIA (Vesta) = Diosa de las virtudes domésticas.
10. DEMETER (Ceres) = Diosa de la agricultura.
11. ARTEMISA (Diana) = Diosa de la caza.
12. HERNES (Mercurio) = Dios del comercio.



¿En qué mes estamos?

Hemos dicho muchas veces que sacamos problemas y entretenimientos de cualquier cosa y en cualquier momento y circunstancia. He aquí una cosa curiosa: El primer día de un mes fue domingo y el último día de ese mes también fue domingo. ¿En qué mes estamos?

No se trata de ninguna broma, puede ocurrir así, pero no me negaréis que se trata de un mes un poco raro. ¿No? Si no lo sacáis, no preocuparos, tendréis la solución en la página 511.

Ej.: Los radios de dos circunferencias concéntricas miden 8 m y 6 m y forman entre sí un ángulo de 45°. Hallar el área del trapecio circular determinado.

$$S = \frac{\pi \cdot 45}{360}(8^2 - 6^2) = \frac{\pi}{8}28 = \frac{7\pi}{2}\,m^2$$

Ej.: Hallar el área de un trapecio circular cuyas bases miden 60° y se sabe que la suma y diferencia de los radios de las circunferencias miden 18 m y 6 m respectivamente.

Como para calcular el área del trapecio necesito conocer los radios de las circunferencias concéntricas, plantearemos un sistema de ecuaciones con las condiciones que cita el problema.

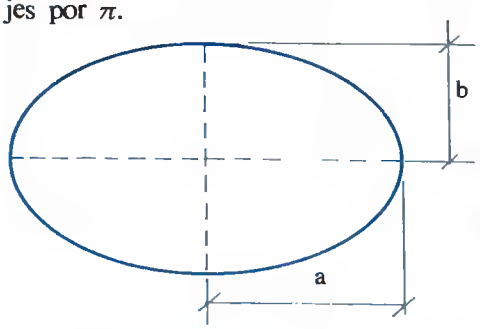
$$\left.\begin{array}{l} R + r = 18 \\ R - r = 6 \end{array}\right\} > 2R = 24 \rightarrow R = 12\ m \rightarrow r = 6\ m$$

Luego su área es:

$$S = \frac{\pi \cdot n^o}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\pi \cdot 60}{360}(12^2 - 6^2) = \frac{\pi}{6}108 = 108\pi\ m^2$$

22.–ELIPSE

La superficie de una elipse equivale al producto de sus semiejes por π.



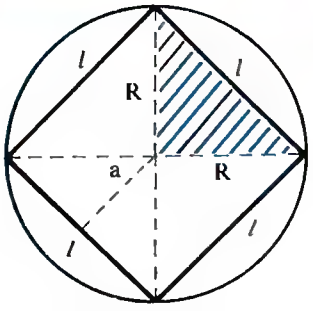
$$S = \pi \cdot ab$$

Ej.: Hallar el área de una elipse que tiene por semiejes 3 y 2 m.

$$S = \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi\ m^2$$

23.–COMPOSICION DE FIGURAS REGULARES

A.–Lado y apotema de un cuadrado inscrito en una circunferencia en función del radio.

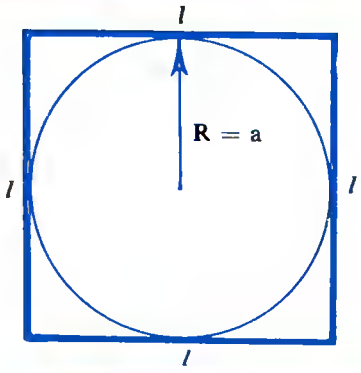


En el triángulo rayado de la figura, mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras.

$$l^2 = R^2 + R^2 \rightarrow l^2 = 2R^2 - l = \sqrt{2R^2}$$

$$l = R\sqrt{2} \qquad a = \frac{l}{2}$$

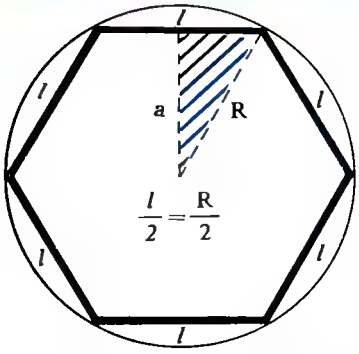
B.—Lado y apotema de un cuadrado circunscrito a una circunferencia en función del radio.



$$l = 2R$$

$$a = R$$

C.—Lado y apotema de un exágono inscrito a una circunferencia en función del radio.



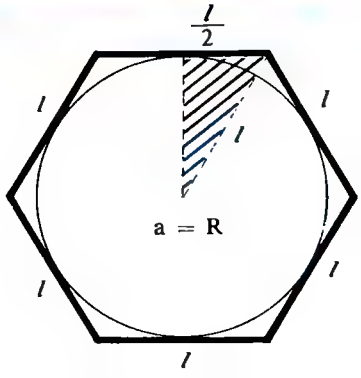
$$l = R$$

En el triángulo rayado de la figura mediante la aplicación del teorema de Pitágoras.

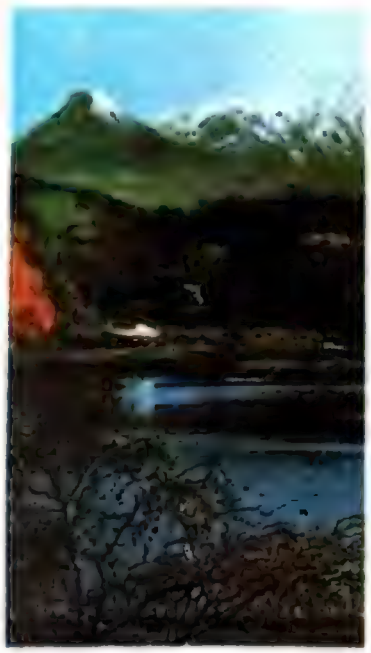
$$R^2 = a^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \rightarrow a^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \rightarrow a^2 = \frac{4R^2 - R^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{3R^2}{4} \rightarrow a = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} \rightarrow \boxed{a = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

D.—Lado y apotema de un exágono circunscrito a una circunferencia en función del radio.



En el triángulo rayado de la figura, mediante la aplicación del teorema de Pitágoras.



Las innovaciones científicas y técnicas siempre han tenido sus detractores y han dado origen a situaciones muy enojosas, se recuerda la oposición al pararrayo y la mal entendida pureza que se oponía al uso médico de los rayos X. Pero en el caso de la oposición a la nueva matemática la situación ha sido más grave, ciertos físicos y hombres de ciencia manifestaron claramente que no existía a su juicio ninguna necesidad de utilizar la nueva matemática.

En realidad, esta polémica no la tenemos bien enfocada, estas modificaciones en la forma de enseñanza obedecen a la pura dinámica innovadora y siempre cambiante de la ciencia.

Las nuevas generaciones que no tienen el lastre de métodos antiguos disfrutarán aprendiendo la matemática moderna que es desde luego más amplia en contenido que la tradicional debido al empuje de los medios de comunicación. No en vano se publican anualmente varias decenas de miles de artículos en revistas especializadas de matemáticas en un solo año, descubriendo siempre nuevas facetas y posibilidades.

Los jardines del Buen Retiro fueron creados por el conde duque de Olivares, allá en 1630, para recreo del rey Felipe IV. Se escogió el sitio en cuestión porque allí se encontraba el monasterio de San Jerónimo el Real y a éste iban los reyes frecuentemente a pasar temporadas. De ahí el nombre de Retiro Real. La obra encargada por el favorito de Felipe IV se terminó en octubre de 1632, y se componía de más de veinte edificios, cinco grandes plazas, un estanque (cuatro veces la plaza Mayor de Madrid y que ya había mandado construir Felipe II para festejar la entrada en la Corte de su cuarta mujer Ana de Austria), seis ermitas (San Antonio, San Bruno, San Pablo, San Juan, San Isidro y la de la Magdalena), dos teatros, un edificio para saraos y bailes, un juego de pelota y el famoso Gallinero (nombre con el que fue designado el lugar hasta que se cambió por el de Buen Retiro, prohibiéndose bajo graves penas el empleo del primer apelativo).

Palacio y jardines fueron visitados por todos los reyes españoles y en su interior se celebraron representaciones teatrales, justas, torneos, bailes y recitales musicales. En algunos reinados

(Continúa en la página siguiente)

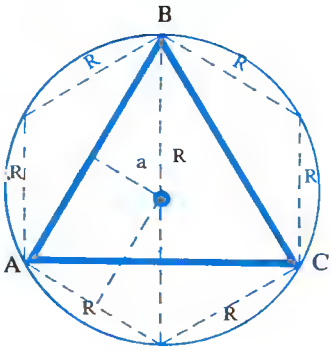
$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + R^2 \rightarrow l^2 = \frac{l^2}{4} + R^2 \rightarrow l^2 - \frac{l^2}{4} = R^2$$

$$\frac{4l^2 - l^2}{4} = R^2 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = R^2 \rightarrow l^2 = \frac{4R^2}{3}$$

$$l = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} \rightarrow l = \frac{2R}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{l = \frac{2\sqrt{3}}{3}R}$$

$$\boxed{a = R}$$

E.—Lado y apotema de un triángulo equilátero inscrito a una circunferencia en función del radio.



En el triángulo $\widehat{ABC}$ rectángulo en A (arco capaz de 90°) mediante la aplicación de un teorema de Pitágoras.

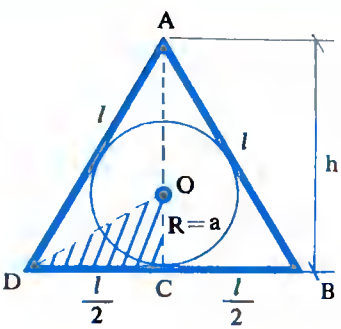
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$(2R)^2 = l^2 + R^2 \rightarrow 4R^2 = l^2 + R^2$$

$$l^2 = 4R^2 - R^2 \rightarrow l^2 = 3R^2 \rightarrow l = \sqrt{3R^2}$$

$$\boxed{l = R\sqrt{3}} \qquad \boxed{a = \frac{R}{z}}$$

F.—Lado y apotema de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia en función del radio.



En el triángulo $\widehat{ABC}$ obtenemos la altura en función del lado.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

La distancia $\overline{OC} = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\,\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

La distancia $\overline{OD} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\,\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

Luego en el triángulo rectángulo rayado en la figura mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{3l^2}{9} = R^2 + \frac{l^2}{4}$$

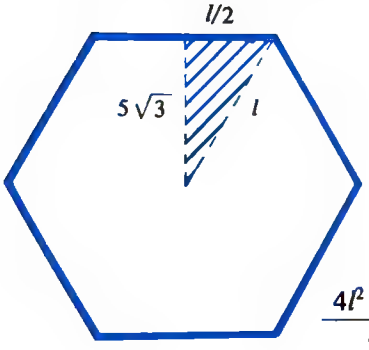
$$R^2 = \frac{3l^2}{9} - \frac{l^2}{4} \rightarrow R^2 = \frac{12l^2 - 9l^2}{36} \rightarrow R^2 = \frac{3l^2}{36}$$

$$R = \sqrt{\frac{3l^2}{36}} \rightarrow \boxed{R = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$$

$$\boxed{a = R}$$

Ej.: La apotema de un exágono es $5\sqrt{3}$ dm.

Hallar el lado del exágono.



Aplicando Pitágoras al triángulo rayado:

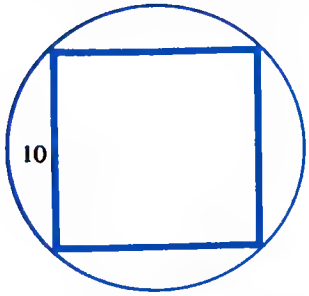
$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (5\sqrt{3})^2$$

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + 25 \cdot 3 \rightarrow l^2 - \frac{l^2}{4} = 75$$

$$\frac{4l^2 - l^2}{4} = 75 \rightarrow \frac{3l^2}{4} = 75 \rightarrow l^2 = \frac{4 \cdot 75}{3}$$

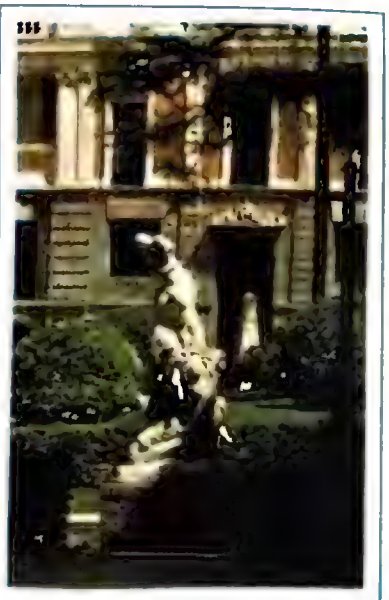
$$l^2 = 100 \rightarrow l = \sqrt{100} = 10 \text{ dm}$$

Ej.: El lado de un cuadrado inscrito a una circunferencia mide 10 m. Hallar el radio de ésta.



$$l = R\sqrt{2} \rightarrow R = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\text{ m}$$



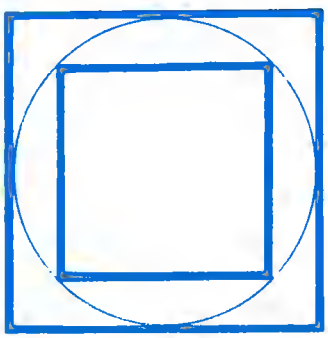
los festejos se desarrollaron casi diariamente, y tanto fue el dinero gastado en algunos años que como cifra curiosa puede señalarse la de 1.689.294 reales de vellón y 43 maravedíes que corresponden a los gastos hechos en el Retiro en el tiempo que media entre los años 1633 a 1637.

En la actualidad la extensión del parque asciende a 1.192.683 metros cuadrados. En su interior existen 95 mil árboles, 55 mil arbustos, 35 mil metros lineales de perfiles y más de 60 variedades de flores, entre las que pueden citarse rosas, begonias, fusias, geranios de hiedra y salmón, salvias, dalias, cinnias y verbenas. Entre los árboles existen plátanos, acacias, castaños, sophoras y pinos; pero el ejemplar verdaderamente interesante es el taxoriun que se encuentra en el Parterre: es un árbol enorme, impresionante, que difícilmente pueden abrazar cinco hombres; baste decir que la nevada que cayó hace algunos años desprendió de sus ramas más de doce toneladas de leña, sin que se notase tal tala. No se tienen noticias de que en España exista otro ejemplar de estas características.

Hoy el Retiro, que comenzó siendo un jardín para reyes, está al alcance de todo el pueblo, que acude a él para jugar, soñar o pasear en todas las épocas del año.

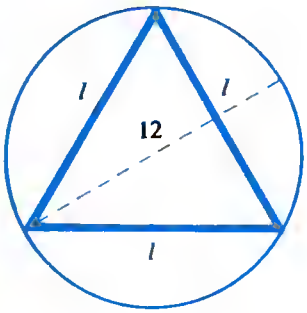
CIRCUNFERENCIA Y CUADRADOS

Tenemos un cuadrado perfecto al cual le inscribimos una circunferencia y a ésta, a su vez, le inscribiremos otro cuadrado como indica el dibujo.



Sabemos que el cuadrado exterior tiene una superficie de 36 cm cuadrados y sin hacer operaciones de ninguna clase queremos saber la superficie del cuadrado interior. La solución en pág. 512.

Ej.: Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de 12 dm de diámetro. Hallar el perímetro del triángulo.



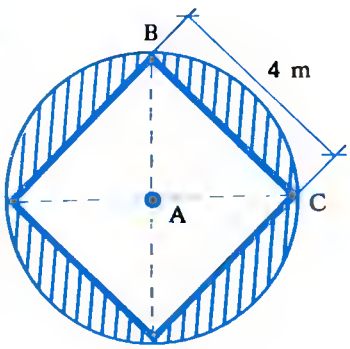
$R = 6$ dm

$l = R\sqrt{3} \rightarrow l = 6\sqrt{3}$ dm

Perímetro $= 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ dm

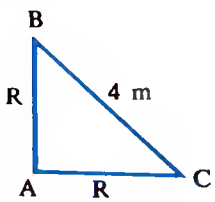
4.–PROBLEMAS DE RECAPITULACION

Ej.: Hallar el área de la parte rayada de la figura siguiente:



$S_{rayada} = S_{círculo} \quad S_{cuadrado}$

Calculemos el radio del círculo en el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ por Pitágoras:

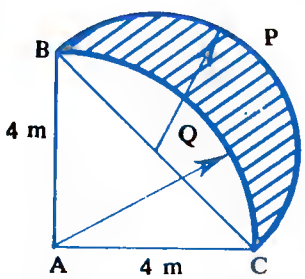


$4^2 = R^2 + R^2 \rightarrow 16 = 2R^2 \rightarrow R^2 = 8 \rightarrow R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ m

Luego:

$S_{rayada} = \pi R^2 - l^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 - 4^2 = 8\pi - 16$ m^2

Ej.: Calcular el área de la parte rayada de la figura siguiente:



$$S_{rayada} = S_{BCP} - S_{BCQ} = S_{BCP} - (S_{ABQC} - S_{ABC})$$

$$S_{rayada} = S_{BCP} - S_{ABQC} + S_{ABC}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ m}$$

$$S_{BCP} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\frac{16 \cdot 2}{4}}{2} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 2}{4 \cdot 2} = 4\pi \text{ m}^2$$

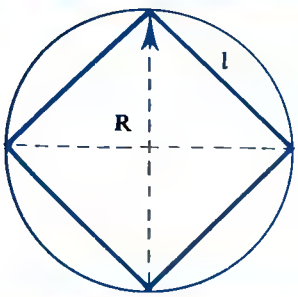
$$S_{ABQC} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi \text{ m}^2$$

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ m}^2$$

$$S_{rayada} = 4\pi - 4\pi + 8 = 8 \text{ m}^2$$

Ej.: Calcular la razón entre los perímetros y la razón entre las áreas de un círculo y de un cuadrado inscrito en él.

– **Cálculo entre la razón de los perímetros.**



$$P_{cuadrado} = 4l = 4R\sqrt{2} \quad (l = R\sqrt{2})$$

$$P_{circunferencia} = 2\pi R$$

luego su razón es:

$$\frac{P_{cuadrado}}{P_{circunferencia}} = \frac{4R\sqrt{2}}{2\pi R} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

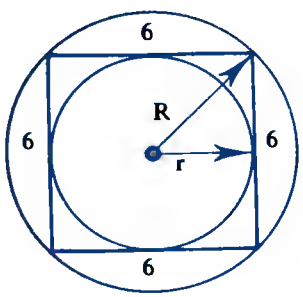
– **Cálculo entre la razón de sus áreas:**

$$S_{cuadrado} = l^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 \quad (l = R\sqrt{2})$$

$$S_{círculo} = \pi R^2$$

Luego su razón es: $\frac{S_{cuadrado}}{S_{círculo}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$

Ej.: Calcular el área de una corona circular determinada por la circunferencia inscrita y circunscrita a un cuadrado de 6 cm de lado.



Inicialmente debemos de calcular los radios de las dos circunferencias.

Entre los grandes escultores que hoy día dominan el espacio del arte español, se puede contar por derecho propio el donostiarra Eduardo Chillida, máximo representante de la escuela vasca, domina con la misma facilidad la piedra, el hierro, la madera y el hormigón. Su obra no figurativa responde a una plasticidad grandiosa, llena de empuje y vigor.

Las modulaciones que logra dar a la materia inspirado siempre en las leyes matemáticas, abarcan y dominan el espacio, impresionando el espíritu del espectador.

Dentro de la escultura abstracta es ya considerado como un clásico, y su obra repartida por todo el mundo es guía para futuras generaciones de escultores.

De sus iniciales estudios de arte figurativo para ser arquitecto, y después de abandonar esta carrera, se pasa por entero a la escultura, evolucionando su obra hacia la abstracción interrogativa.

Lo más importante de su obra es la relación entre escultura y hombre, los caminos en que se afirma la capacidad humana de crear y soñar.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LOS GUANTES DE LA PAGINA 474.

Pongámonos siempre en el peor de los casos, como siempre hacemos, ya que lo fácil sería sacar dos guantes que sean del mismo color y uno de cada mano. Pero no, tenemos que poner el caso extremo.

Si tenemos media docena de guantes de un color es que tenemos *tres pares de guantes blancos* y otros tantos pares de guantes negros. ¿Qué os parece si sacamos SIETE? (la mitad más uno). En el peor de los casos, podemos sacar tres blancos y tres negros de la misma mano, al sacar otro más ya tenemos una perfecta pareja sea cualquiera el color.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LOS COCHES DE LA PAGINA 468.

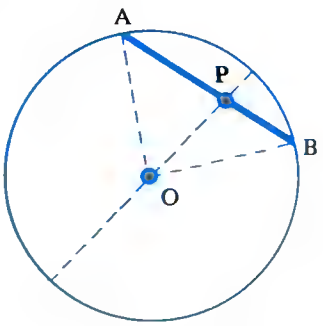
Si el coche A pasa o adelanta al B cada 2 km, quiere decirse que mientras el uno anda 2 km (el B) el otro anda 7 (el A). A la segunda pasada el B ha recorrido 4 km y el A 14 km, y a la tercera pasada el A ha recorrido 21 km, y el B sólo 6 km. Como el circuito tiene 5 km, el coche A ha recorrido 4 vueltas más 1 km y el B 1 vuelta más 1 km, o sea que lo caza por tercera vez a *1 km de la vuelta*.

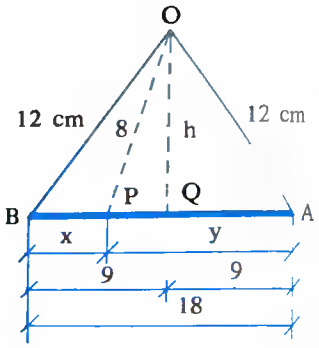
Circunferencia pequeña: $l = 2r$; $r = \frac{l}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm

Circunferencia grande: $l = R\sqrt{2}$; $R = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm

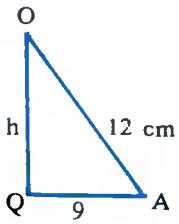
$S_{corona} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 3^2 = 18\pi - 9\pi = 9\pi$ cm^2

Ej.: En una circunferencia de 12 cm de radio se traza una cuerda de 18 cm que corta a un diámetro en un punto P que dista 8 cm del centro. Calcular los segmentos en que el punto P divide a esta cuerda.



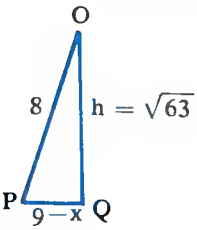


En el triángulo $\widehat{AOQ}$:



$12^2 = h^2 + 9^2$; $144 = h^2 + 81$; $h^2 = 144 - 81$; $h = \sqrt{63}$

En el triángulo $\widehat{OPQ}$:



$8^2 = (\sqrt{63})^2 + (9 - x)^2$; $64 = 63 + 81 + x^2 - 18x$

$x^2 - 18x + 80 = 0$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 320}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

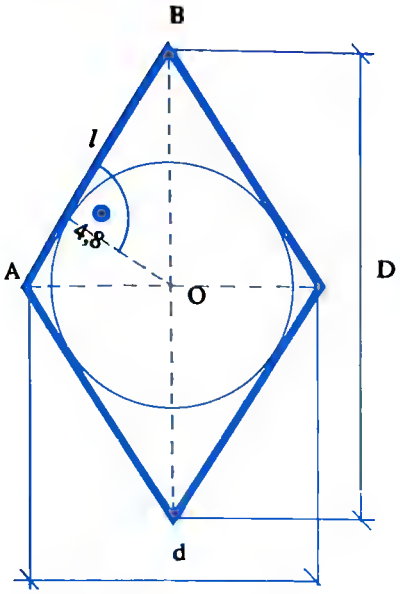
$$= \frac{18 \pm 2}{2} = \begin{cases} 10 \\ 8 \end{cases}$$

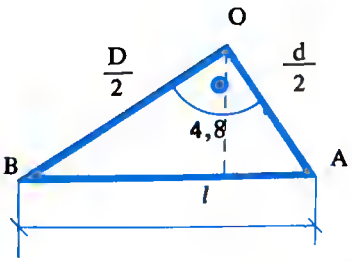
La solución válida es $x = 8$, ya que por el contrario para $x = 10$, la longitud $\overline{PQ}$ sería negativa ($\overline{PQ} = 9 - x$).

Luego definitivamente:

$x = 8$ cm $y = 10$ cm

Ej.: Un rombo circunscrito a un círculo de 4,8 dm de radio tiene 96 dm^2 de área. Calcular las longitudes de sus diagonales.





Si el área del rombo es de 96 dm^2 es evidente que el área del triángulo $\widehat{AOB}$ es la cuarta parte del área del rombo, luego:

$$S_{AOB} = \frac{1}{4}96 = 24\ dm^2$$

Pero el área del triángulo $\widehat{AOB}$ es también

$$S_{AOB} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot 4{,}8}{2} = 2{,}4l$$

Luego:

$$2{,}4\,l = 24 \rightarrow l = \frac{24}{2{,}4} = 10\ dm$$

Así que las diagonales las podemos obtener formando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{D \cdot d}{2} = 96 \quad \text{(Utilizando el dato del área)} \\ \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = 10^2 \quad \text{(Aplicando Pitágoras al triángulo AOB)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} D \cdot d = 192 \\ \dfrac{D^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} = 100 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} D \cdot d = 192 \\ D^2 + d^2 = 400 \end{array}\right\} \rightarrow D = \frac{192}{d}$$

$$\left(\frac{192}{d}\right)^2 + d^2 = 400; \quad \frac{36864}{d^2} + d^2 = 400; \quad 36864 + d^4 = 400\,d^2$$

En el año 1859 se prueba en el puerto de Barcelona el Ictineo, submarino ideado por Narciso Monturiol que deseabe construir una embarcación para que la emplearan los pescedores de coral. Esta fue la primere nave submarina que navegó bajo el agua con autonomía propia. Dos años más tarde realizó con éxito varias pruebas en Alicante presenciadas por una comisión del gobierno. En el año 1864 construyó el segundo modelo más grande que el primero, accionado por un motor de reacción químice y todas laa pruebas a que fue sometido dieron resultados muy positivos.

Al no contar con protección oficial, no pudo seguir sus investigaciones por lo costosas que resultaban. Monturiol conoció los días amargos del abendono de muchos que antes le animaban y que le dejaron solo al ver que su invento no le daría dinero.

Murió prácticamente olvidado, y sus embarcaciones vendidas como chatarra. Su libro "Ensayo sobre el arte de navegar debajo del agua" no fue editado hasta 1891, seis años después de su muerte.

En la foto monumento a su memoria, obra de José María Subirachs.

En un antiguo carruaje de caballos sabemos que existen dos ejes, el delantero y el trasero. Se pregunta ¿por qué el eje delantero se desgasta más que el trasero?

LA SOLUCION EN PAGINA 52B.

Estaban juntos una pantera y su pequeña cría. Entonces la cría dijo: ¡Soy hija de esta pantera, pero esta pantera no es mi madre! ¿Que explicación puede tener esta afirmación?

La única explicación lógica que puede tener tal afirmación no es más que una, ya que la pantera no es su madre y ella es hija de la pantera, es que ES SU PADRE.

NOTA: Observad que todo lo estoy poniendo en femenino, pantera, hija. Así os vais mentalizando con dicho femenino y no pensáis que sea el padre porque no existe pantera y pantero, como mona y mono; león, leona, etc. Por supuesto, este problema sólo se puede poner cuando con una terminación en femenino, nos da ambas clases, masculino y femenino.

$$d^4 - 400\,d^2 + 36.864 = 0;\ d^2 = \frac{400 \pm \sqrt{160.000 - 147.456}}{2} =$$

$$= \frac{400 \pm \sqrt{12.544}}{2} = \frac{400 \pm 112}{2} =$$

$$= \begin{cases} 256 \to d^2 = 256;\ d = \pm\sqrt{256} = \pm 16 \\ 144 \to d^2 = 144;\ d = \pm\sqrt{144} = \pm 12 \end{cases}$$

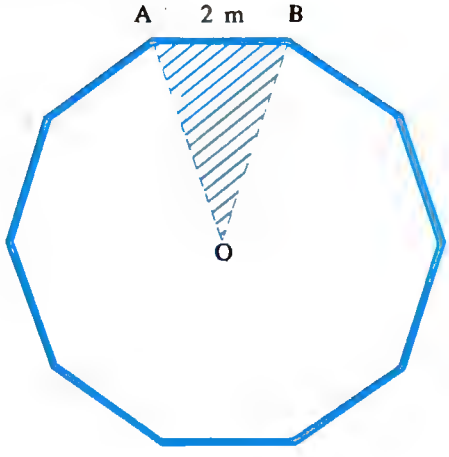
Despreciando las soluciones negativas, obtenemos:

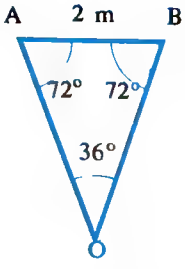
$$d = 16 \text{ dm} \longrightarrow D = 12 \text{ dm}$$
$$d = 12 \text{ dm} \longrightarrow D = 16 \text{ dm}$$

Siendo cualquiera de las parejas soluciones del problema.

Ej.: Hallar el área de un decágono regular cuyo lado es de 2 m.

Obsérvese en la figura un decágono regular (10 lados iguales) y considérese el triángulo rayado en la figura, del que necesitamos conocer la distancia $\overline{OB}$ para calcular la apotema del decágono y consecuentemente su área.



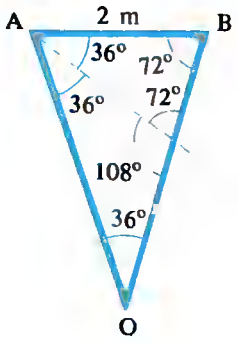


$$\hat{O} = \frac{360}{10} = 36^\circ$$

$\hat{A} = \hat{B}$ (El triángulo $\widehat{AOB}$ es isósceles)

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180^\circ \to \hat{A} + \hat{B} + 36 = 180 \to \hat{A} + \hat{B} =$
$= 144$ ($\hat{A} = 72^\circ$ y $\hat{B} = 72^\circ$)

Repitiendo de nuevo el triángulo, obsérvese la construcción que se proyecta.

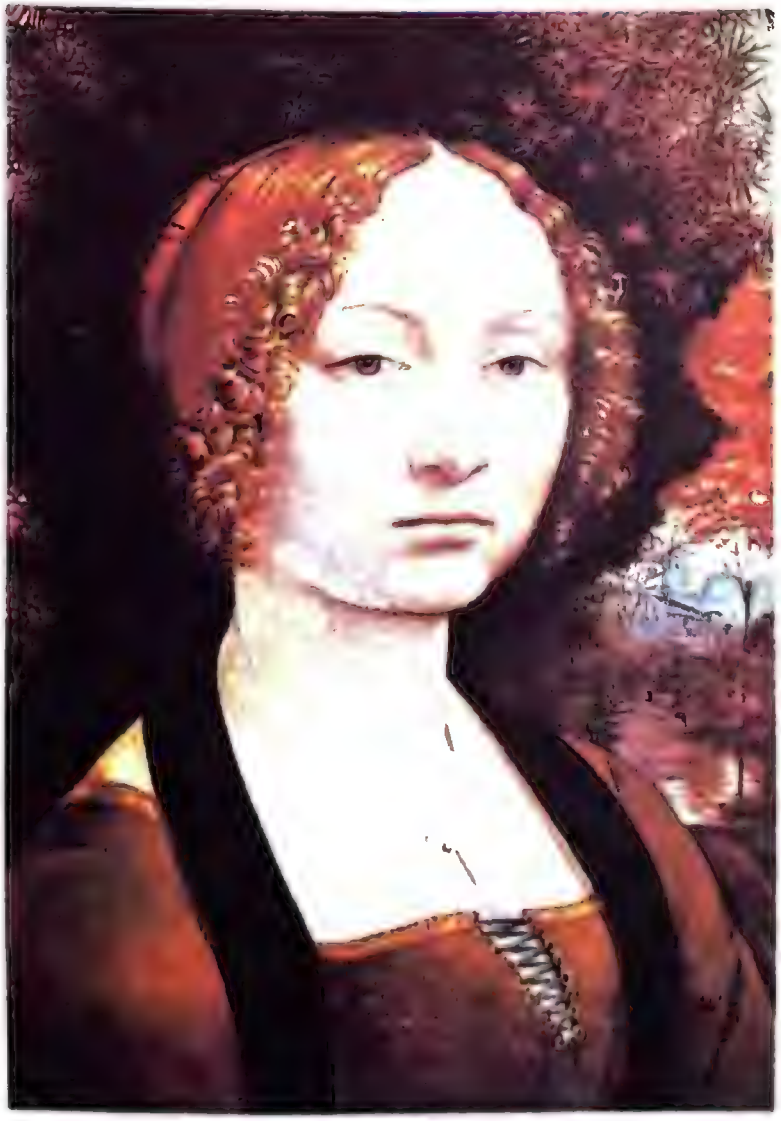


$\overline{AB} = 2$ m

$\overline{AP} = 2$ m

$\overline{OP} = 2$ m

Bisectriz de $\hat{A}$



Leonardo Da Vinci, arquitecto, escultor, pintor, ingeniero y hombre de ciencia italiano, está considerado el máximo maestro del Renacimiento; como científico, posee una gran precisión científica y al mismo tiempo revela una poderosa imaginación.

Construyó gran número de aparatos mecánicos: sifón, pipeta, bomba compresora de doble efecto, grúa, tornillo sin fin, espejo convergente, etc.

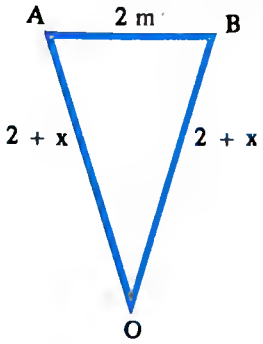
En su faceta pictórica, toda su obra está perfectamente catalogada y guardada en los mejores museos del mundo, y aunque alguna vez salta a primeras páginas de los periódicos el descubrimiento de cuadros atribuidos a este genio, normalmente resultan copias antiguas de seguidores de su estilo. Incluso la venta de obras entre coleccionistas ya es rarísima por los precios que se alcanza. La última transacción fue entre el príncipe y coleccionista Franz Josef II de Liechtenstein, que recibió más de cinco millones de dólares de la Galería Nacional de Arte de Washington por una pintura de 36 x 38 cm, fechada en 1480 y que representa a Ginevra de Benci, mujer de rostro esquivo seguramente joven princesa florentina que nunca soñó con que su imagen sería guardada por los más sofisticados ingenios electrónicos.

Un oso parta da un punto A y recorre 10 km hacia al Sur. Alll cambia de diracción y racorra otros 10 km hacia al Esta y de alll otros 10 km hacia al Norta y llega exactamanta al punto da partida A. Sa pragunta ¿da qué color es el oso?

NOTA: Esta pragunta no es caprichosa, no as de broma, cuando veais la solución o la comprendéis os causará gracia.

LA SOLUCION EN PAGINA 527.

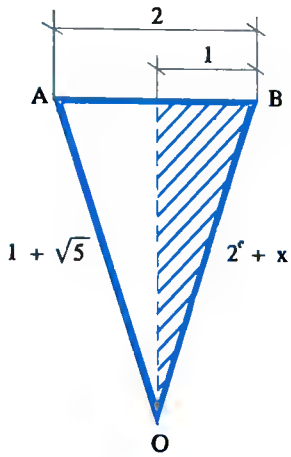
Obsérvese que los triángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{ABP}$ son semejantes por tener sus tres ángulos iguales.



$$\frac{2}{x}=\frac{2+x}{2}\rightarrow 4=2x+x^2\rightarrow x^2+2x-4=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}-1+\sqrt{5}\\ -1-\sqrt{5}\end{cases}$$

Conociendo los tres lados del triángulo, mediante un teorema de Pitágoras, obtendremos la apotema del decágono que coincide con la altura $\overline{OQ}$ del triángulo isósceles propuesto.



$$2^c + x = 2 - 1 + \sqrt{5} = 1 + \sqrt{5}$$

En el triángulo $\widehat{OQB}$ calculamos la apotema a por Pitágoras.

$$(1+\sqrt{5})^2 = 1^2 + a^2 \rightarrow 1 + 5 + 2\sqrt{5} = 1 + a^2 \rightarrow a^2 = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$a=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

Luego el área del decágono es:

$$S=\frac{P\cdot a}{2}=\frac{2\cdot 10\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}=10\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ m^2$$

TEMA 22

GEOMETRIA DEL ESPACIO

INDICE

1.–EL PLANO.
2.–DETERMINACION DE UN PLANO.
3.–POSICION RELATIVA DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.
   A.–Posición relativa de dos planos.
   B.–Posición relativa de dos rectas en el espacio.
   C.–Posición relativa de recta y plano.
4.–LINEA DE MAXIMA PENDIENTE DE UN PLANO.
5.–ANGULOS DIEDROS.
6.–ANGULOS POLIEDROS.
7.–POLIEDROS REGULARES.
   A.–Exaedro o Cubo.
   B.–Tetraedro.
   C.–Octaedro.
   D.–Dodecaedro.
   E.–Icosaedro.
8.–TEOREMA DE EULER.
9.–ESTUDIO DE FIGURAS EN EL ESPACIO.
   A.–Prisma.
   B.–Pirámide.
   C.–Tronco de Pirámide.
   D.–Cilindro.
   E.–Cono.
   F.–Tronco de Cono.
10.–GEOMETRIA DE LA ESFERA.
   A.–Esfera.
   B.–Huso esférico.
   C.–Cuña esférica.
   D.–Casquete esférico.
   E.–Zona esférica.
   F.–Segmento esférico.
   G.–Sector esférico.
11.–EL PRISMATOIDE Y SUS GENERALIZACIONES.
12.–PROBLEMAS DE RECAPITULACION.

TEMA 22

El hombra siempre necesitó objetos auxiliares para desarrollar algunas funciones de su vida, así el santarsa, qua an un principio lo hacía en al suelo fua avolucionando. Primaro construiría una aspacia da banqueta rústica o quizás utilizase un trozo da tronco para ir an sucasivas generacionas craando la silla, muebla imprascindible y que pesa a los miles y milas de modalos astudiados y disañados hasta hoy día sa basa an al principio y an la forma que considararon más apropiada nuestros más remotos antecesoras.

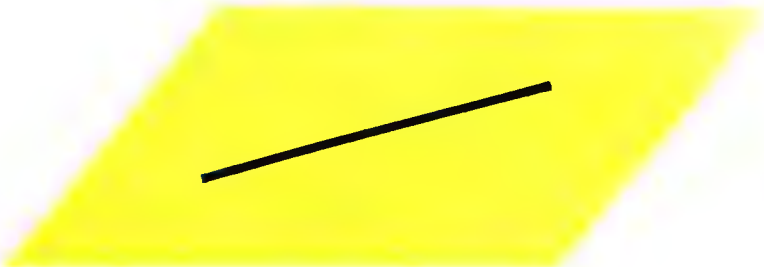
GEOMETRIA DEL ESPACIO

1.—EL PLANO

Se entiende por plano a cualquier superficie tal que, si consideramos dos puntos cualesquiera de ella, también contiene a todos los puntos de la recta que une a estos dos. Esta superficie, llamada plano, es ilimitada en todas sus direcciones. En general, a los planos se les suele representar por un paralelogramo que no desea indicar en ningún caso limitación del plano.

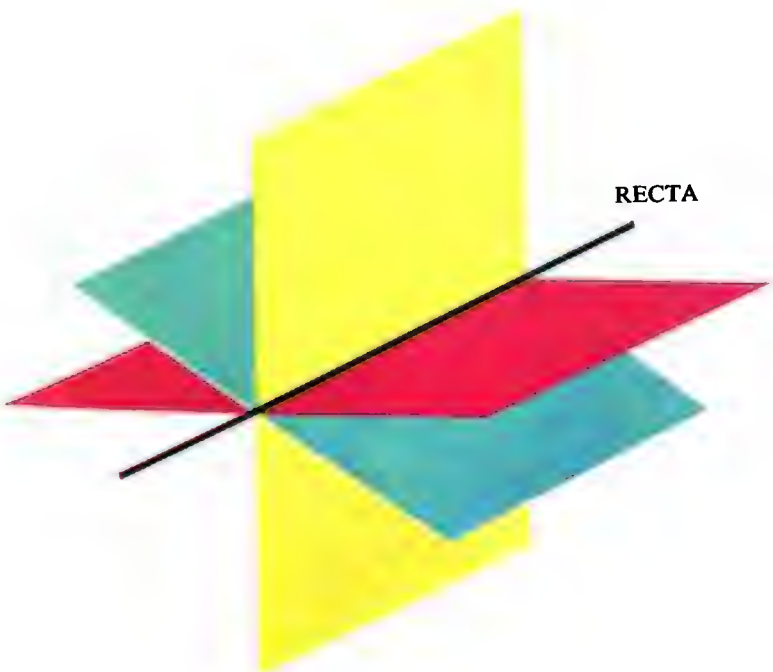
Del concepto expuesto se pueden deducir las siguientes consideraciones:

— Cualquier recta contenida en un plano divide a éste en dos partes llamadas **semiplanos.**



– Cualquier plano divide al espacio en dos regiones, no pudiéndose pasar de una región a otra sin atravesar el plano.

– Por una recta cualquiera pasan siempre infinitos planos.



Inspirados en temas legandarios e históricos, Ricardo Wagnar fue el genio máximo da la música romántica. Nació en 1819 y murió en 1883. Esta inclinación al drama musical parece qua fua debida a la impresión que le produjo una fuarta tampastad qua azotó violentamenta al barco donde viajaba en ciarta ocasión, llevándole esta sansación a componer una de sus más célebres obras "el 8uque Fantasma". En 1842 fua nombrado maastro de capilla de la Corta da Sajonia. Tuvo qua luchar mucho para imponer su obra, ya qua su forma da hacar música no fue comprendida. Aparta de la música escribió obras literarias, filosóficas y taóricas. También confaccionó los planos del taatro dal puablo de Babiera donda vivió muchos años. Esta compositor y dramaturgo alemán da cuya muarte an Venacia sa van a cumplir ahora los cian años es uno de los grandes exponentas dal genio creador, compuso dramas como "Tristán a Isolda", "El anillo da los Nibelungos", "Sigfrido", etc., y óparas como "Tannhäuser" con su célabra marcha de los paregrinos.

El tenis, juego practicado, con ayuda de una raquata qua impulsa una pelota da caucho forrado da tala de 6,50 cm da diámatro, con un peso da 58 gramos, as hoy día uno de los daportas qua mueve más millonas de espactadores y da pasetas. Existen campos de tanis para mayor o manor número de aspactadores, en todas las ciudadas, paro el mayor número da parsonas qua han concurrido a presanciar un partido fua en Taxas en su famoso "Astródomo" asistieron 31.000 aspactadores.

El tanis as un daporta idaal para al aspaciamianto particular de toda clasa da personas.

Hombras y mujeras puadan practicarlo, sin somatarsa a asfuarzos axtramos las proporcionará muy agradables horas da esparciamiento.

Los jugadoras profasionalas, por el contrario, nacasitarán esfuerzos impresionantas, su máxima azaña es ganar los cuatro grandas títulos:

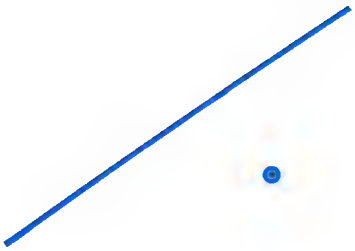
Campaonato da Estados Unidos, de Francia, da Austria y da Inglaterra (Wimbledon).

2.–DETERMINACION DE UN PLANO

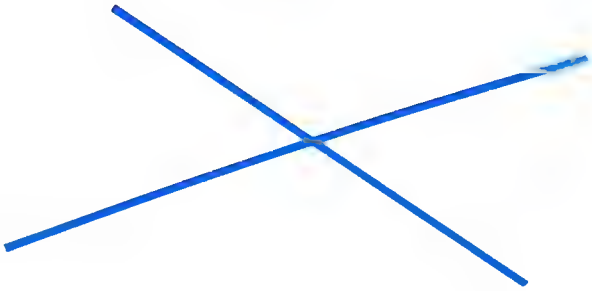
Cualquier plano queda perfectamente determinado de las siguientes formas:

– Por tres puntos que no estén en linea recta.

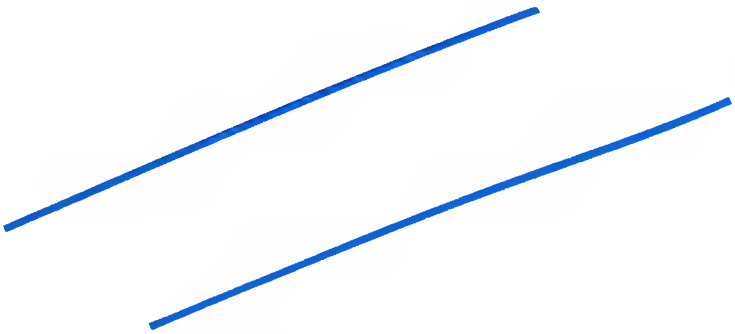
– Por una recta y un punto ajeno a ella.



– Por dos rectas que se cortan.



– Por dos rectas paralelas.



3.–POSICION RELATIVA DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

A.–Posición relativa en dos planos

– Sin ningún punto en común (paralelos).

– Con una recta en común (se cortan).

El más conocido y más prollfico matamático da nuestro siglo es Nicolás Bourbaki, no es posibla citar el año da nacimiento de asta personaja ni dascribir sus características físicas por la sancilla razón da que no axiste; Bourbaki es un saudónimo qua agrupa a varios eminantes matamáticos qua por el año 1931 concibiaron la idea da revisar y raascribir toda la matamática da principio a fin y da acuardo con las ideas más modarnas. Por fortuna, al éxito acompañó a la emprasa y a los primaros diaz volúmanes publicados se sumaron luago otros diaz y más tarda otros tantos, siguiando incansabla su tarea da lagar al mundo un tratado complato da asta ciancia. Su labor de síntasis as colosal y la influencia ajarcida sobre las ganaracionas postarioras inmansa.

Esta grupo siampra jovan retira a sus miembros el daracho de decisión al cumplir los 50 años y los pasa a la catagoría de consajeros, avitando asl el anquilosamiento.

La voluntad es un factor importantísimo an la determinación de nuestro destino particular.

Para consaguir una cosa, es necesario querar conseguirla. Se atribuye al genaral Foch la siguiante frasa hacha ecuación

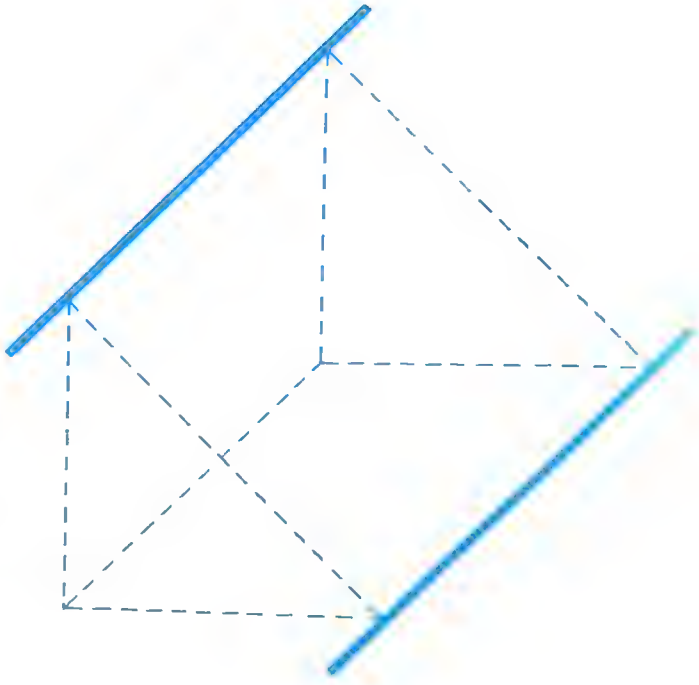
"Voluntad" = "Victoria"

Da todas formas, no todos los hombres podamos hacer lo qua quaremos, cada uno tiana sus aptitudas y cada cual trabaja según sus posibilidadas. La mayor parta da los astudios raalizados hasta ahora para var da datarminar las aptitudas sa basan en la daterminación da la capacidad da los sentidos. Una parsona tiena más mamoria, otra más inteligancia, otra más voluntad. Conviena saber qua todas las potencias sa influyan mutuamanta.

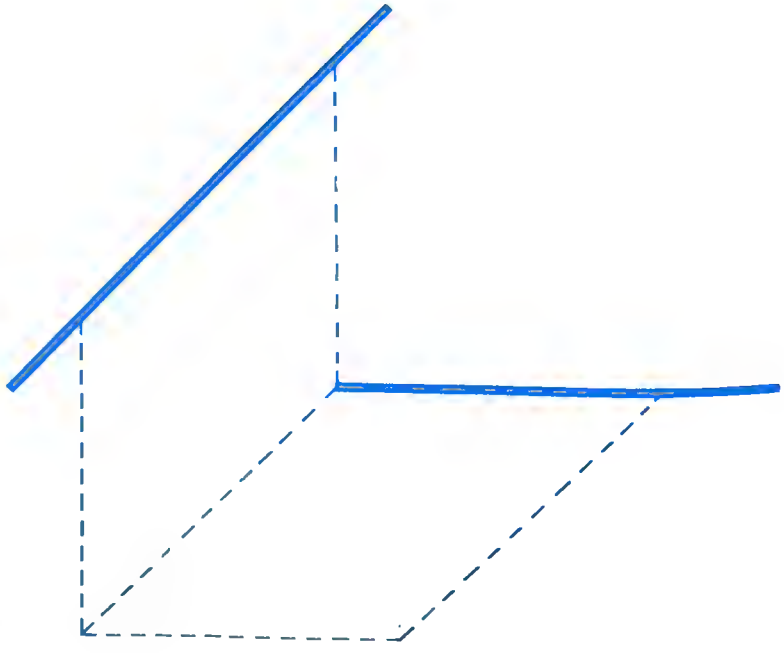
Para axaltar la constanta voluntad sa ponan ajamplos como el da la gota da agua que perfora la más dura pladra a fuarza de lavas golpes. Comparando con la gota, al asfuerzo suave y cotidiano, llega a consagulr lo qua se propone.

B.—Posición relativa de dos rectas en el espacio

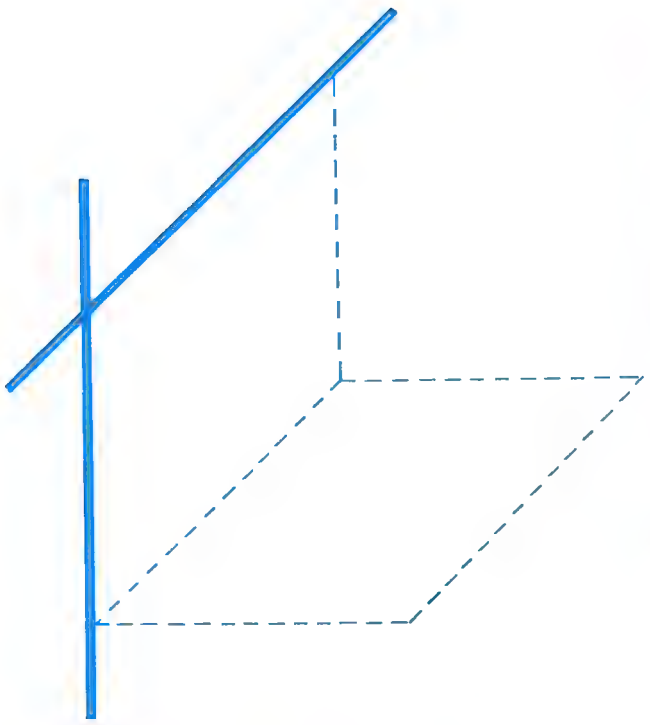
— Sin ningún punto en común y en el mismo plano (paralelas).



— Sin ningún punto en común y en distinto plano (se cruzan).



– Con un punto en común (se cortan).



C.–Posición relativa de recta y plano

– Todos los puntos de la recta están en el plano (está contenida).

Paralelamente con las investigaciones sobre uso pacífico de la energía atómica se están desarrollando estudios sobre aprovechamiento del calor solar.

Concretamente, en España donde el clima es templado, el calor del sol que llega hasta la superficie de la tierra se estima por término medio en unos 1.500 kilovatios/hora por metro cuadrado. Los hombres de ciencia han venido poniendo en juego esta inextinguible fuente de energía para fines industriales. Uno de los resultados conseguidos lo constituyen las baterías solares que transforman en electricidad el calor de los rayos del sol.

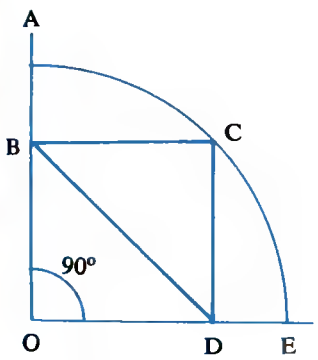
También se han hecho notables progresos en el estudio de un horno solar. Este consiste en un aparato destinado a producir altas temperaturas, acumulando las radiaciones solares mediante lentes y un espejo cóncavo, con una capacidad térmica de más de 3.400 grados centígrados. El nuavo horno está dotado de un haliostato y un espejo cóncavo.

Un horno solar da asta clase es absolutamenta indispansable para los experimentos de rasistencia calorífica da los ladrillos refractarios o para la fusión da metales fusibles a altas temperaturas, tales como el circonio, al molibdeno, al tungstano, etc.

Somos una familia numarosa, ya qua tengo tantos harmanos como harmanas, pero mis harmanos tienen la mitad da harmanos qua da hermanas. ¿Cómo puede sar eso, y cuantos somos?

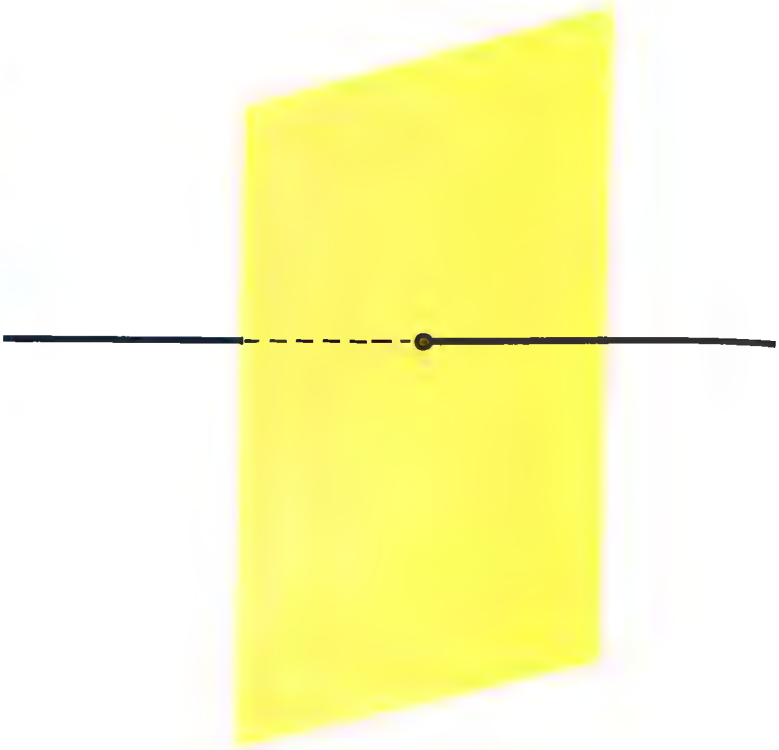
LA SOLUCION EN EL PROXIMO NUMERO, PAGINA 528.

Tanemos un cuadranta da círculo. Las llnaas OA y OE son iguales, ya qua as el radio dal círculo. Inscribimos an la figura un rectángulo y quaramos saber sl la racta BD es mayor, igual o manor que la recta OE y porqué.



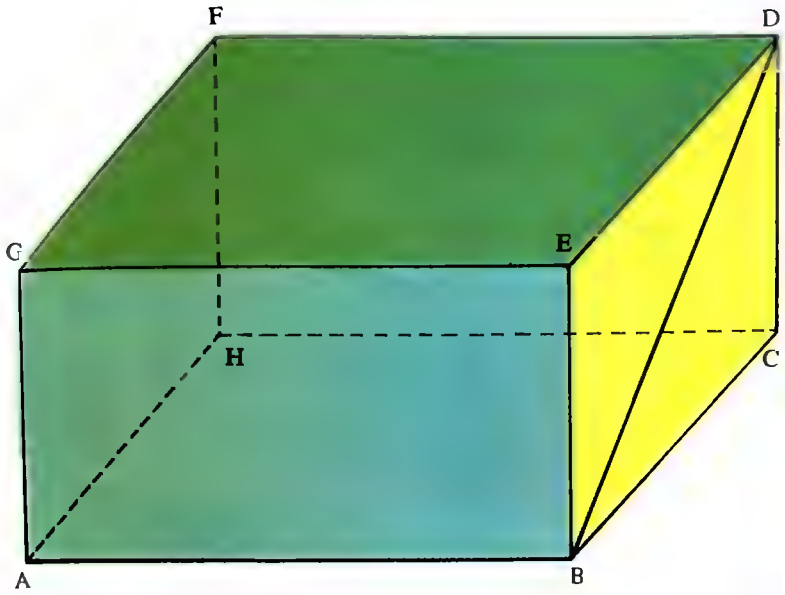
LA SOLUCION ENPAGINA 528.

— La recta y el plano poseen un punto en común (se cortan).



— La recta y el plano no poseen ningún punto en común (paralelos).

Ej.: En la figura siguiente



Podemos hacer las siguientes consideraciones:

– Los planos AHFG y BCDE son paralelos.

– Los planos ABEG y EDFG se cortan según la recta EG.

– Las rectas GF y BC son paralelas.

– Las rectas CH y ED se cruzan.

– Las rectas AB y BC se cortan en B.

– La recta BD está contenida en el plano BCDE.

– La recta GF y el plano ABEG se cortan en el punto G.

– El plano CDFH y la recta AB son paralelos.

Es muy difícil discernir cómo los puablos idantifican la fábula con la raalidad, hasta el punto de ser imposibla, a veces, sapararla de la historia y ver qué hay da fantasía y qué de ciarto. Pues bien, es praciso admitir qua no es vano el dicho da qua en toda mantira hay algo de verdad; y así, en cualquiar hecho mítico, as seguro que, oculto o dascubiarto, hay un fundamento raal, sobra al cual sa han abalanzado los poetas y artistas, para propagarlo y hacarlo imparecadaro. Además de estos factoras, en la elaboración da la mitología de un puablo interviana el santido estético del mismo. Por ejamplo: la Mitología hindú es abigarrada, fantástica an extramo, axhaustiva.

En la Mitologla hindú sa distinguan como perlodos o épocas:

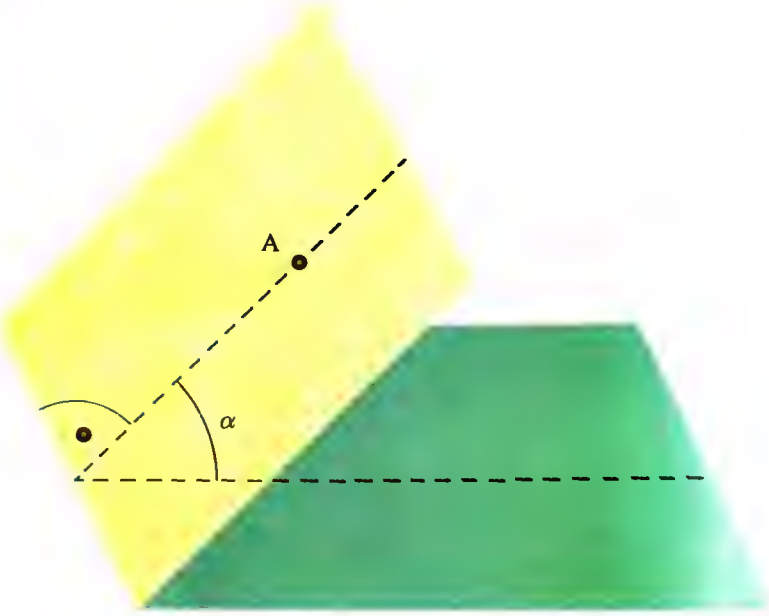
El Vedismo.
El Brahmanismo.
El Visnulsmo.
El Sivalsmo.
El Budaísmo.

Todas ellas giran alradador da las sucesivas reencarnaclonas de los crayentes, cuyas almas van ascendiando o descandiando sagún su comportamiento.

Los hombres de ciencia han demostrado después de estudios muy detenidos que el maná, alimento que sirvió de sustento a los israelitas cuando atravesaron el desierto, camino de la tierra prometida era un liquen alimenticio que se conoce con el nombre de "Lecanora Sculenta". Este vegetal de minúsculo tamaño crece entre las rocas formando costras y placas arbustivas, el liquen se multiplica por yemitas compuestas de hongo y alga. La mayor parte de sus múltiples variedades tienen utilidad en la industria farmacéutica y también algunos sirven de tintes y colorantes. El llamado liquen de Islandia, que se cría espontáneamente en esta isla, tenía antiguamente un privilegio de exportación, ahora se cultiva también en otros países de Europa. En España crece en los Pirineos, montañas de Asturias, Guadarrama y otras. Se usa en farmacia como emoliente y pectoral. También se utiliza para alimentar al ganado por su gran valor nutritivo.

4.–LINEA DE MAXIMA PENDIENTE DE UN PLANO

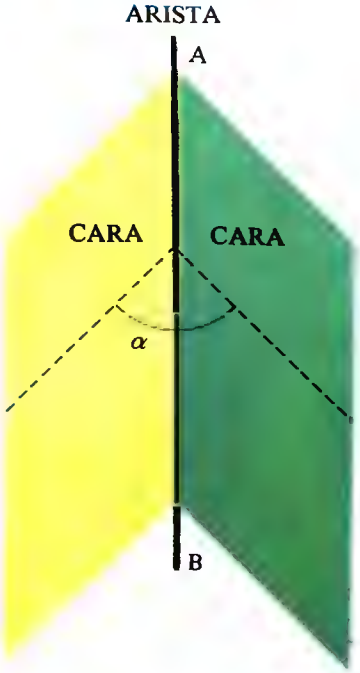
El problema consiste en trazar por un punto de uno de dos planos que se cortan, una recta que forme con el otro mayor ángulo; esta recta es precisamente la línea de máxima pendiente del plano en cuestión y se obtiene trazando por el punto la perpendicular a la recta intersección de los dos planos.



5.–ANGULOS DIEDROS

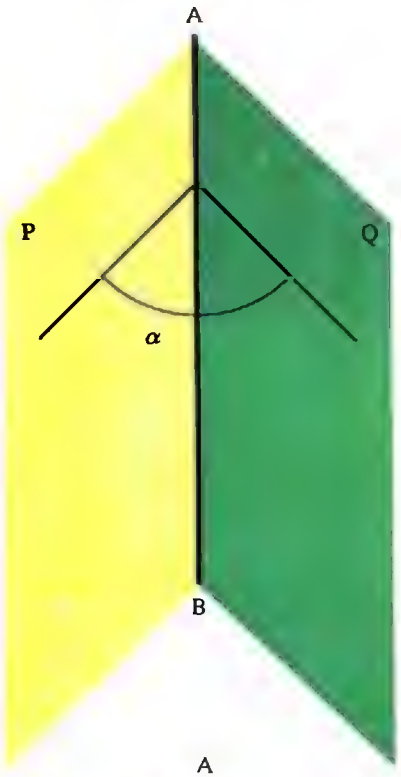
Es la figura formada por la intersección de dos semiplanos.

A la recta intersección de los dos semiplanos se la llama **arista** y a los dos semiplanos **caras.**

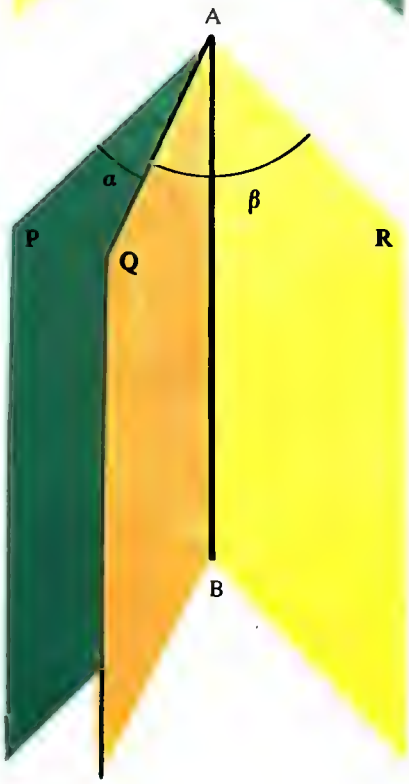


La representación de un ángulo diedro se hace indicando las letras de su arista.

Si ocurriese que varios diedros tienen la misma arista, cada uno de ellos se expresa por las letras de la arista y las letras de los dos semiplanos que forman el diedro.



$\alpha = AB = A\ B\ P\ Q$



$\alpha = A\ B\ P\ Q$
$\beta = A\ B\ Q\ R$

SOLUCION AL PROBLEMA DEL MES, PAGINA 490

Al tener la semana 7 días, al octavo se empieza a repetir el ciclo, o sea, tenemos que buscar un mes que tenga todos los días exactos como múltiplos de 7 y luego sumarle 1. El único mes que nos serviría para esto es uno que tenga 29 días y ese no puede ser otro que un mes de *febrero* y que ese año sea *bisiesto*.

NUMEROS AUTOMORFOS

Se llaman números automorfos a todos aquellos números enteros cuyo cuadrado termina en el mismo número dado.

$5^2 = 25$
$21^2 = 141$
$36^2 = 1.296$

NUMEROS ESTROBOGRAMATICOS

Se llaman números estrobogramáticos (¡vaya palabrita, caramba!) aquellos que tienen la propiedad de leerse de la misma manera girándolos 180°.

69	196961
96	169691
1961	
1691	

SOLUCION AL PROBLEMA DEL SECUESTRADOR DE LA PAGINA 484

Las autoridades inmediatamente pensaron (y quizás tú también) que iba a tomar algún miembro de la tripulación como rehén. No. Esa no es la solución. La más lógica es que si pidiera un solo paracaídas bien podían darle uno defectuoso. Al pedir dos, sabía que pensarían las autoridades en un posible rehén y le darían los dos en perfectas condiciones de funcionamiento.

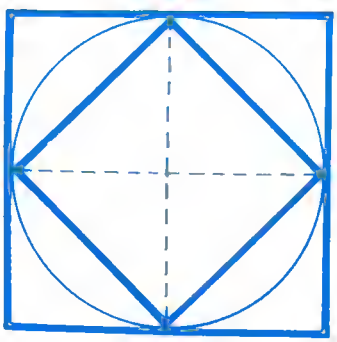
SOLUCION AL PROBLEMA DE LA LOGICA DE LA PAGINA 488

Se presentan 19 alumnos. Bien, si vamos a descubrir la primera pregunta, nos va a ser más difícil. ¿Por qué no ver la segunda pregunta? Veamos: Los aprobados de Albacete representaban un 10 por ciento de los aprobados en total. Si se aprueban a los 19, entonces el 10 % es 1,9 que al no ser número entero no nos sirve, ya sea de Albacete o de Mahón. Por lo tanto, el número inferior a 19 y que su 10 por ciento sea un número entero es *10*.

Su 10 por ciento es 1. Entonces aprobaron 10 y de esos uno es de Albacete.

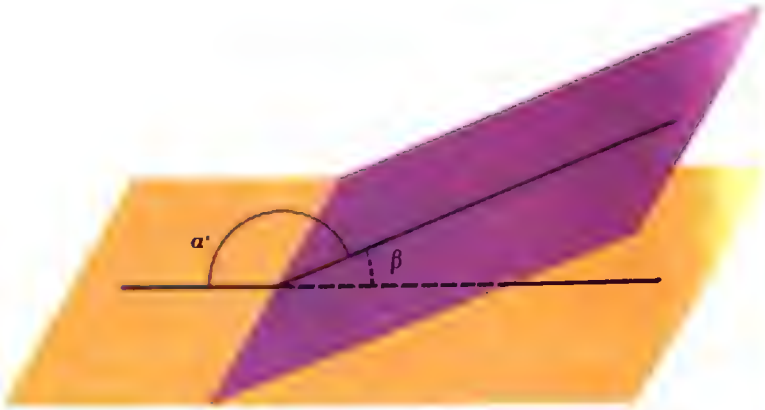
SOLUCION AL PROBLEMA DE CIRCUNFERENCIA Y CUADRADOS DE LA PAGINA 494

Si giramos el cuadrado interior 45° lo veréis

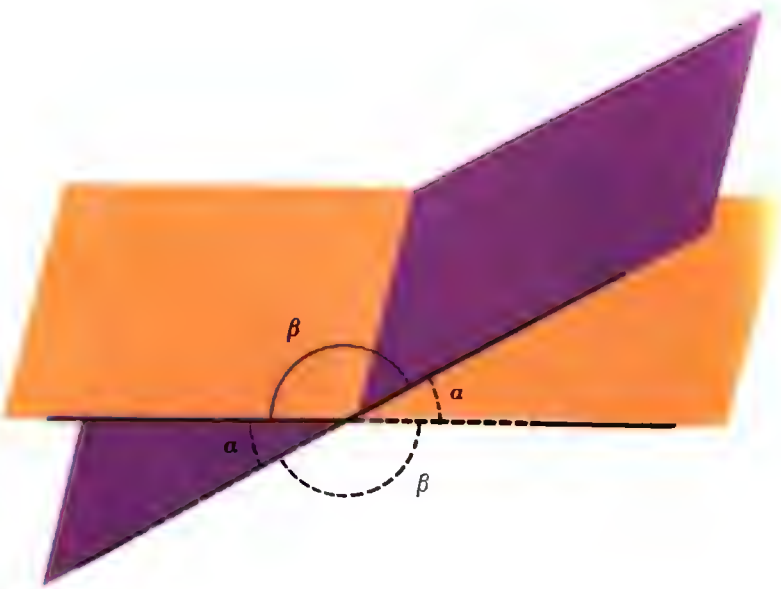


Vemos en seguida que es la mitad del exterior, al trazar las diagonales del interno vemos que éste tiene 4 triángulos iguales, y el externo 8 iguales al de 4. Por lo tanto, si el extremo tiene 36 cm cuadrados el interno tendrá 18 cm cuadrados.

Diedros adyacentes son aquellos consecutivos cuyas caras comunes están en un mismo plano.



Diedros opuestos por la arista son aquellos en los que las caras de uno son prolongación de las del otro.



Diedro **llano** es aquel que tiene sus caras, una prolongación de la otra.

Cuando dos diedros suman un recto se dice que son **complementarios** y cuando suman un diedro llano, **suplementarios.**

Los ángulos diedros se miden por sus ángulos rectilíneos que son los formados por las intersecciones de un plano cualquiera perpendicular a la arista del diedro.

Un ángulo diedro puede ser agudo, obtuso, o recto, según lo sea su ángulo rectilíneo correspondiente.

A cuatro Km de Oviedo, en una hermosa zona de la falda del Naranco, Ramiro I mandó edificar un palacio para fiestas en verano. Es una obra maestra del estilo asturiano. Desde sus miradores se puede ver un maravilloso paisaje de colinas y montes con los picos de la Sierra de Aramo al fondo.

Su decoración escultórica es abundante en figuras florales, de animales y de representaciones humanas; tiene columnas funiculares imitando sogas, con capiteles piramidales. En el año 848 fue destinado a iglesia, consagrándose como templo dedicado a Sta. María. Se compone de una planta en forma de rectángulo alargado, con dos pisos en cada uno de ellos, una estancia amplia y dos pequeñas; tiene rica decoración y dos miradores. Este palacio recuerda bastante el estilo de las antiguas villas romanas.

Este estilo Ramirense de gran complejidad constructiva se adelantó a los sistemas que se pondrían de manifiesto en Europa doscientos años después con el advenimiento del Románico.

"Siempre valoramos demasiado los beneficios que hacemos".

Sénece

"Se debe amar al padre si es bueno, y sufrirlo si es malo".

Séneca

"Se tarda mucho en olvidar lo que mucho tiempo llevó aprender".

Séneca

"El que sólo busca grandezas, alguna vez las encuentra".

Sénece

"Espera que te hagan a ti lo que tú haces a los otros".

Sénece

"Dos veces vence quien en la victoria se vence".

Séneca

"Cuando una parte de todo cae, lo que queda no es muy seguro".

Séneca

"Bueno es tener fama, pero mejor es tener en qué apoyarla".

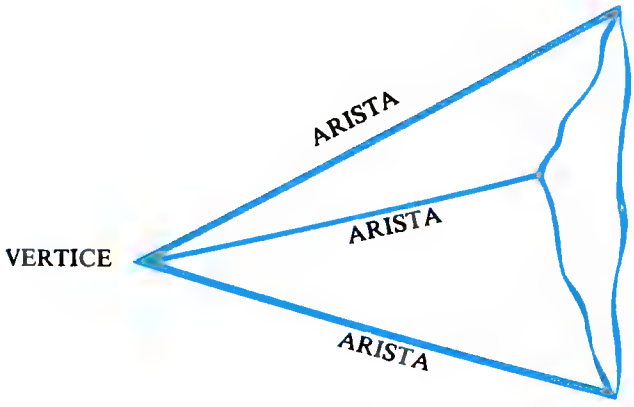
Sénece

"No es necesario ser rico para sólo subsistir".

Séneca

6.—ANGULOS POLIEDROS

Es la figura formada por la intersección de más de dos planos que se cortan dos a dos según rectas que concurren en un mismo punto.



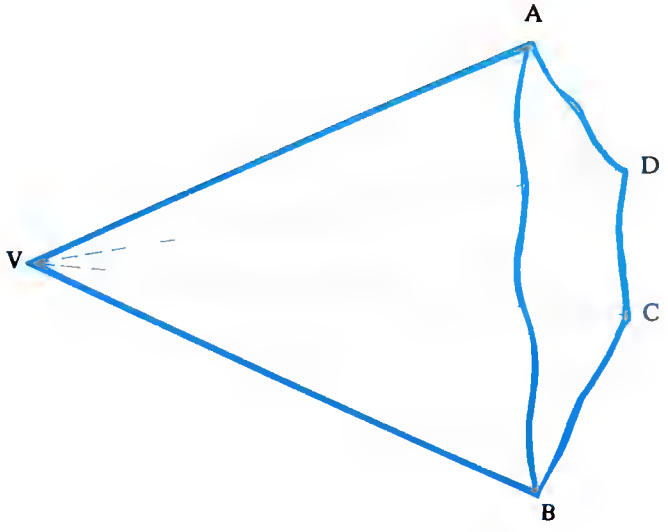
Cada recta intersección de dos planos recibe el nombre de **arista.**

El punto intersección de la arista se llama **vértice.**

Los planos definidos por dos aristas consecutivas se llaman **caras** (cada dos caras consecutivas forman un diedro del ángulo poliedro).

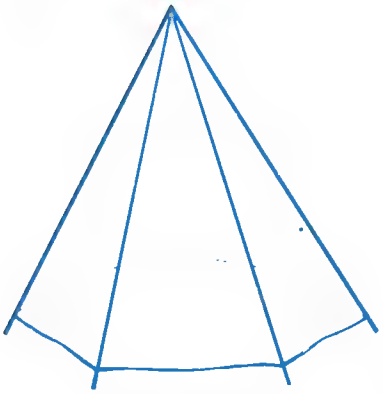
Los planos determinados por dos aristas no consecutivas se llaman **diagonales** (en el caso de un triedro de tres caras no es posible formar diagonales).

Los ángulos poliedros se nombran con la letra del vértice seguida de una letra por cada arista.

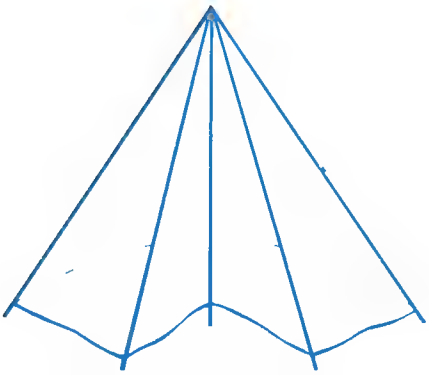


V A B C D

Un poliedro es **convexo** si todas sus aristas están en una misma región respecto a uno cualquiera de sus planos y **cóncavo** cuando ocurre lo contrario.



POLIEDRO CONVEXO



POLIEDRO CONCAVO

En cualquier poliedro se verifican las siguientes condiciones:

La suma de las caras (ángulo de cara) de un poliedro es menor de cuatro ángulos rectos.

– En un ángulo poliedro una cara es menor que la suma de las demás.

– La suma de los diedros de un triedro (caso particular de poliedro) es mayor de dos rectos y menor de seis rectos.

Ej.: Averiguad si pueden formar ángulos triedros los tres ángulos rectilíneos siguientes: A = 120° 15′ B = 110° 45′ y C = 129°.

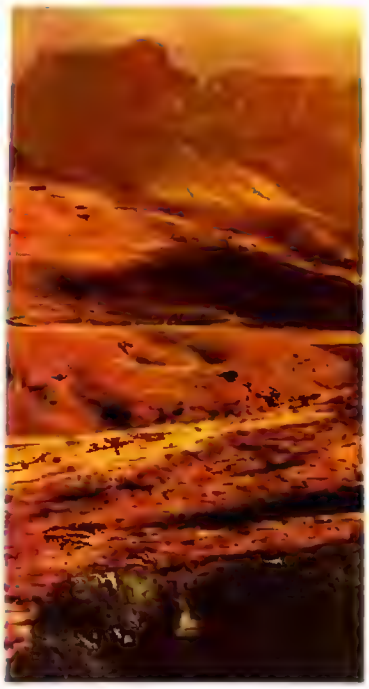
Tendremos que hacer todas las comprobaciones posibles, hasta ver que cualquier cara es siempre menor que la suma de las otras dos.

$$A < B + C \rightarrow 120^\circ\ 15' < 110^\circ\ 45' + 129^\circ$$

$$B < A + C \rightarrow 110^\circ\ 45' < 120^\circ\ 15' + 129^\circ$$

$$C < A + B \rightarrow 129^\circ < 120^\circ\ 15' + 110^\circ\ 45'$$

Efectivamente pueden formar triedro.



Las fechas y las duraciones de los períodos en que los biólogos y los geólogos han dividido los primeros tiempos del planeta que habitamos no son todavía exactas, y los errores serán probablemente de millones de años.

Es indudable que transcurrieron gran cantidad de años antes de que la Tierra fuera habitable, desde que la nebulosa madre se concentró en un núcleo semifundido que al enfriarse se fue cubriendo de una corteza sólida hasta que las tierras y las aguas se separaron y toda la esfera se rodeó con una atmósfera densa y opaca.

El cálculo de este período se ha efectuado conociendo el tiempo necesario para que las aguas eliminen de las tierras el cuatro por ciento de sales que cubría todo. Para ello se requirió fuesen lavadas las rocas primitivas en un espesor de dos kilómetros, lo que no pudo hacerse en menos de dos millones de años. Parecida cantidad de años fue necesaria para que se depositaran las 2.530 capas superpuestas de terrenos calcáreos que se han encontrado en el Cañón del Colorado.

El génesis llama días a estos períodos, pero ya Moisés aclaró: "Mil años son para ti como un ayer".

La sabiduría brahmánica perfeccionó las ciencias auxiliares de los Vedas (cuatro libros sagrados que contienen oraciones, doctrinas e himnos), dedicando mucho tiempo a desarrollar la Matemática, la Medicina, la Jurisprudencia y los llamados seis sistemas de Filosofía, especialmente el Yoga, que enseña un método notabilísimo de perfeccionamiento psíquico, mediante los cuales el espíritu se abstrae del mundo exterior para experimentar la unión mística o la superación de la condición humana y la fusión en el alma universal o Brahma.

El yoga concede una gran importancia a los ejercicios físicos; a través de ellos se llega a la abstracción espiritual en la que algunos individuos alcanzan estados hipnóticos muy elevados haciéndose insensibles al dolor.

Explica la unidad del ser oculto que se manifiesta de varias maneras.

En una de ellas, Maya, la ilusión, es la que hace posible la reencarnación; una vez totalmente desprendidos de esta ilusión por medio de sucesivas reencarnaciones el alma se reintegra al Ser Supremo.

Ej.: Si un ángulo poliedro de cinco caras (pentaedro) tiene sus caras iguales averiguar el valor máximo de cada una de ellas.

La suma de las caras de cualquier poliedro debe ser menor de 4 rectos, es decir, menor de $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$.

Como las cinco caras son iguales, cada una de éstas valdrá como máximo: $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, es decir, que llamando α al ángulo de cada cara, se verifica que:

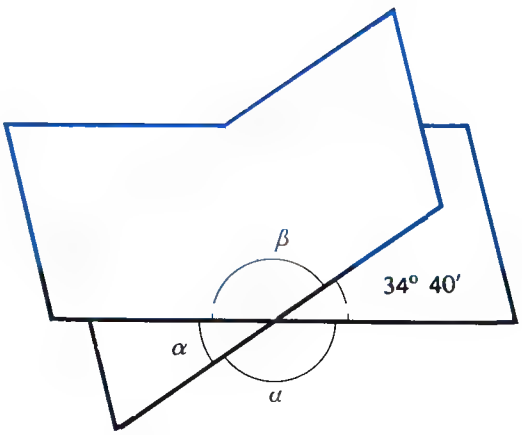
$$\alpha < 72^\circ$$

Ej.: Dos planos que se cortan, forman cuatro diedros. Sabiendo que uno de ellos mide $34^\circ\ 40'$ hallar los otros tres diedros.

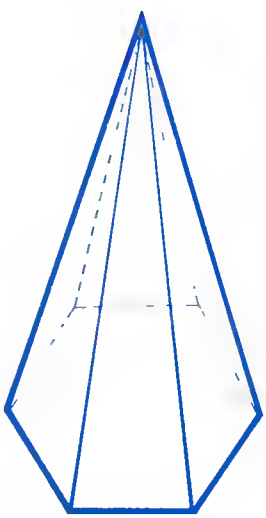
$\alpha = 34^\circ\ 40'$ (por opuestos por la arista)

$\beta = 180^\circ - 34^\circ\ 40' = 179^\circ\ 60' - 34^\circ\ 40' = 145^\circ\ 20'$ (por suplementarios)

$\gamma = 145^\circ\ 20'$ (por opuestos por la arista)



Ej.: La punta de una torre forma un ángulo poliedro de 6 caras iguales que sumadas miden 200°. Averiguar cuánto vale el ángulo de la base de cada una de las caras.



Así, pues, la suma de los ángulos de los 6 triángulos o caras de la punta de la torre es: $6.180^\circ = 1.080^\circ$, y como la suma de los ángulos del vértice es 200°, la suma de los ángulos de las bases es pues $1.080^\circ - 200^\circ = 880^\circ$, que habrá que dividir entre 12 ángulos iguales (dos por cada base o cara), es decir, que cada ángulo de la base de cada cara mide:

$$\frac{880^\circ}{12} = 73^\circ\ 20'$$

7.–POLIEDROS REGULARES

En general se entiende por poliedro a una parte del espacio limitada por polígonos y se dice que un **poliedro convexo es regular** cuando tiene iguales todos sus ángulos diedros, ángulos poliedros y caras.

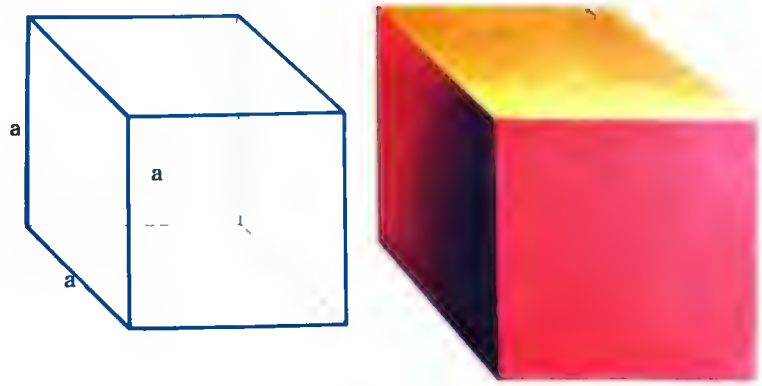
A continuación se detallan los cinco poliedros regulares que existen:

Nombre del poliedro	Forma de las caras	Número de caras	Lados de cada cara	Número de vértices	Aristas por vértice	Número de aristas
Exaedro o cubo	Cuadrados	6	4	8	3	12
Tetraedro	Triángulos equiláteros	4	3	4	3	6
Octaedro	Triángulos equiláteros	8	3	6	4	12
Dodecaedro	Pentágonos regulares	12	5	20	3	30
Icosaedro	Triángulos equiláteros	20	3	12	5	30

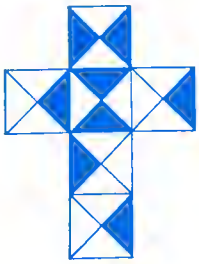
A continuación se exponen la forma de cada poliedro regular y su desarrollo (base de su construcción).

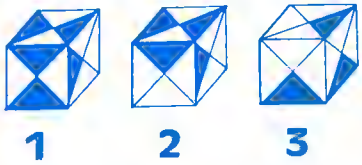
En cualquiera de ellos la superficie se obtiene hallando el área de una de sus caras y multiplicando ésta por el número de caras del poliedro, y el volumen se obtiene como en cualquier figura espacial, multiplicando el área de la base por su altura (excepto en el caso del octaedro, dodecaedro e icosaedro que habrá que combinar figuras), teniendo en cuenta que si la figura acaba en "pico" (forma piramidal) habrá que dividir por 3 el volumen.

A.–Exaedro o cubo



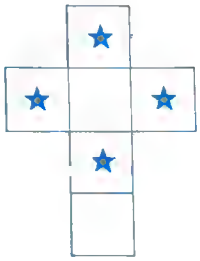
Exaedro o cubo

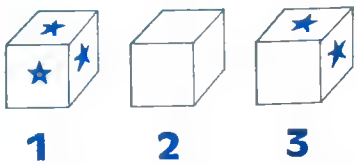


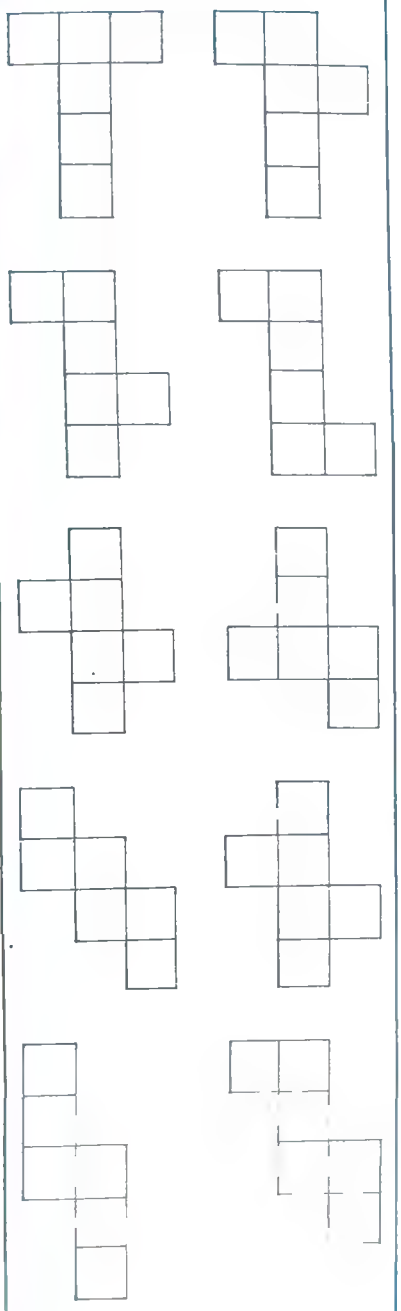


Como estamos estudiando todo lo relativo al hexaedro o cubo y este poliedro es tan usado en la vida normal, te proponemos unos problemas de observación. Tienes que indicarnos a la vista del desarrollo superior a cuál de los cubos ya armados y dibujados en su parte inferior pueden corresponder cada uno.

LA SOLUCION EN EL PROXIMO NUMERO, PAG. 543.

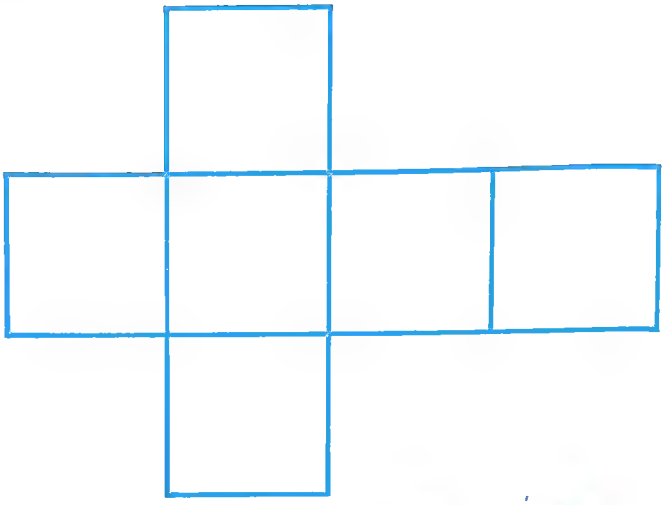






En el texto matemático se representa gráficamente la forma más normal de dibujar el desarrollo del cubo, pero también se puede representar de otras diez formas que presentamos en la parte superior.

Desarrollo del exaedro o cubo



$$S = 6 \cdot S_{cara} = 6a^2 \quad ; \quad \boxed{S = 6a^2}$$

$$V = S_{base} \cdot H = a^2 \cdot a = a^3 \quad ; \quad \boxed{V = a^3}$$

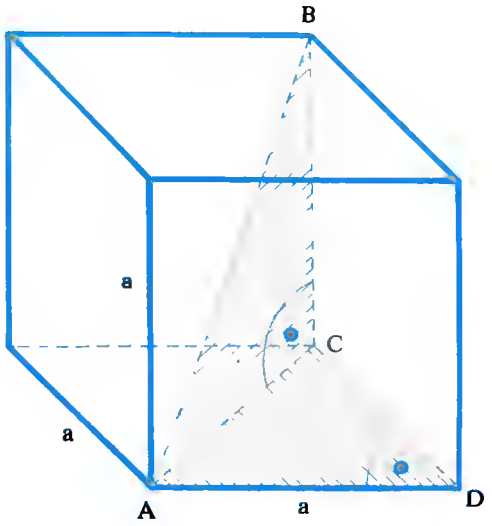
Ej.: Hallar la superficie y el volumen de un cubo de 5 cm. de arista.

$$S = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$$

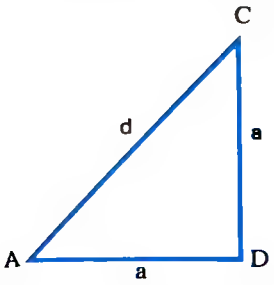
$$V = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

Ej.: Sabiendo que la diagonal de un cubo mide $4\sqrt{3}$ m, hallar el volumen.

Es evidente que para hallar su volumen necesitamos conocer su lado o arista; vamos, pues, a intentar localizar triángulos rectángulos que nos la proporcionen con el dato de la diagonal.

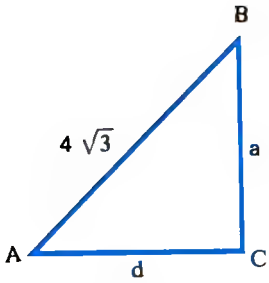


En el triángulo rectángulo $\widehat{ACD}$



$$\Rightarrow d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$$

En el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$



$$\Rightarrow (4\sqrt{3})^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow 48 = a^2 + d^2$$

Sustituyendo $d^2 = 2a^2$ en $48 = a^2 + d^2$ se obtiene una ecuación con la incógnita del lado o arista del cubo:

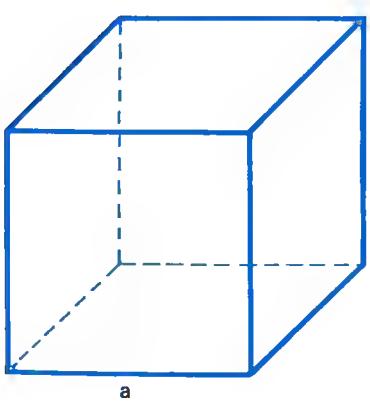
$$48 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow 48 = 3a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm\sqrt{16} = \pm 4;$$

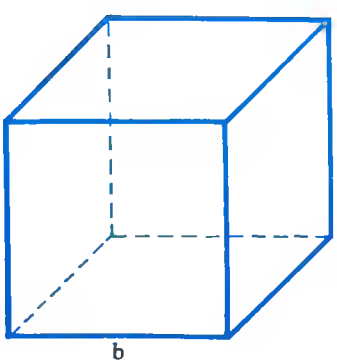
$$a = 4 \text{ m}.$$

luego su volumen es:

$$V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ m}^3$$

Ej.: Las aristas de dos cubos difieren en 2 cm y sus volúmenes en 56 cm^3. Hallar la longitud de sus aristas.





CASINO

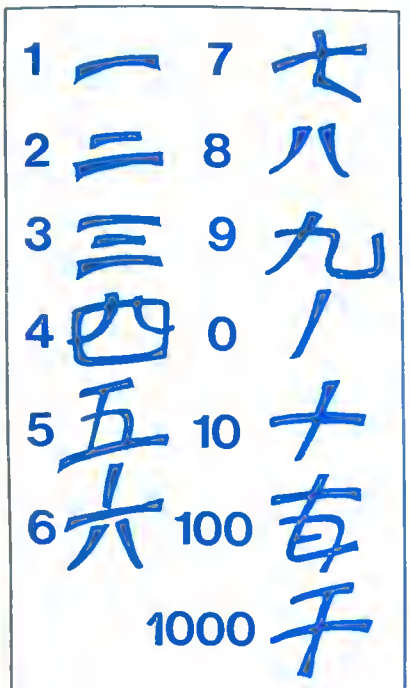
Dos amigos van a un casino de la costa. Mientras uno de ellos se entretiene en observar el lujo y el buen gusto de las instalaciones, ver a los jugadores, estudiar los gestos y aprender los mínimos movimientos de la gente tanto si gana como si pierde, el otro amigo se entretiene y se divierte jugando a la ruleta.

Al cabo de cierto tiempo ambos se encuentran y el "jugador" le dice a su amigo que, después de jugar a la ruleta a dos colores o bien rojo o bien negro, se había quedado sin dinero:

—¡Explícate bien! —comentó el amigo.

—He cambiado un billete de fichas; siempre he jugado la mitad de mi capital, a rojo o a negro. Cada vez que ganaba me daban lo mismo que había apostado (siempre la mitad del dinero total que tenía en fichas), y, por supuesto, cada vez que perdía, la casa se quedaba con lo que había apostado. Lo curioso es que, si una vez ganaba, a la siguiente vez perdía. He ganado igual número de veces que he perdido y sin embargo... me he quedado sin una sola ficha. ¿Cómo te explicas esto?

LA SOLUCION EN PAG. 544.



Las civilizaciones chino-japonesas también emplean la base diez para su sistema de numeración. Se cree que adaptaron los conocimientos de otros pueblos a su sistema de escritura vertical. Con los símbolos representados en la parte superior puede construirse cualquier cantidad, aunque para la vida moderna es totalmente inoperante siendo en las contabilidades de todos los países asiáticos de uso normal los símbolos normales empleados en Occidente.

Plantearemos un sistema de ecuaciones con las condiciones que cita el problema.

$$\left.\begin{array}{l} a - b = 2 \\ a^3 - b^3 = 56 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow a = 2 + b \\ \rightarrow (2 + b)^3 - b^3 = 56 \end{array}$$

$$8 + b^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot b + 3 \cdot 2 \cdot b^2 - b^3 =$$

$$= 56 \rightarrow 8 + b^3 + 12b + 6b^2 - b^3 = 56$$

$$6b^2 + 12b - 48 = 0 \rightarrow b^2 + 6b - 8 = 0$$

$$b = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{68}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{17}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-6 + 4\sqrt{17}}{2} = -3 + 2\sqrt{17} \\ \dfrac{-6 - 4\sqrt{17}}{2} = -3 - 2\sqrt{17} \end{cases}$$

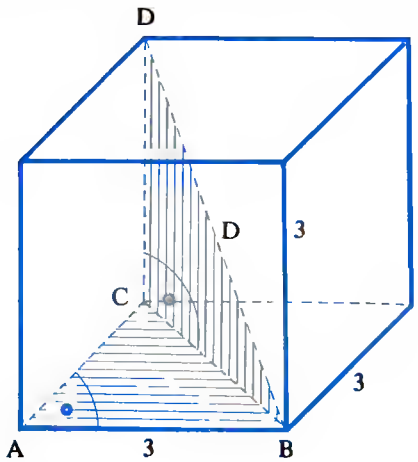
para $b = -3 + 2\sqrt{17}$ cm $\rightarrow a = 2 - 3 + 2\sqrt{17} = -1 + 2\sqrt{17}$ cm

Ej.: Hallar la diagonal de un cubo cuya superficie total es de 54 m^2.

Inicialmente vamos a obtener la arista del cubo con el dato de su superficie.

$$S = 6a^2 \rightarrow 54 = 6a^2 \rightarrow a^2 = \frac{54}{6} = 9 \rightarrow a = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

Apliquemos ahora dos teoremas de Pitágoras al cubo en cuestión:



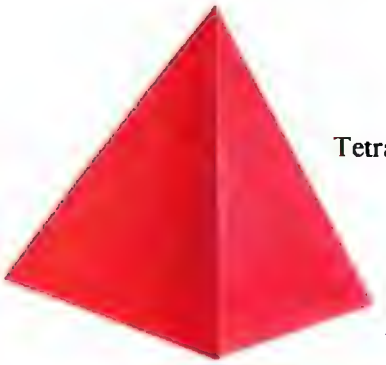
$$\widehat{ABC} \rightarrow d^2 = 3^2 + 3^2 \rightarrow d^2 = 18$$

$$\widehat{BCD} \rightarrow D^2 = 3^2 + d^2 \rightarrow D^2 = 3^2 + 18$$

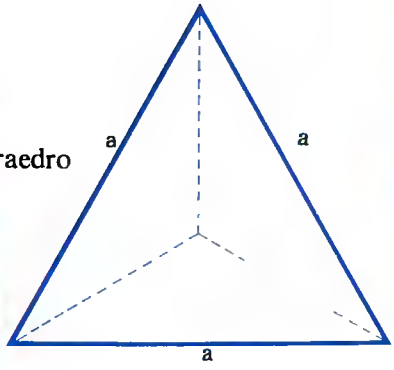
De donde se deduce que:

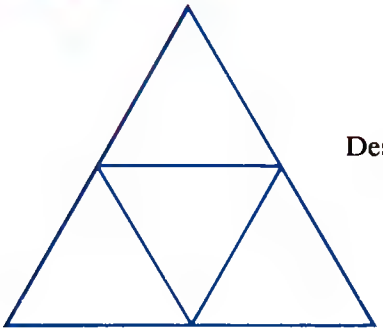
$$D^2 = 9 + 18 \rightarrow D^2 = 27 \rightarrow D = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

B.–Tetraedro



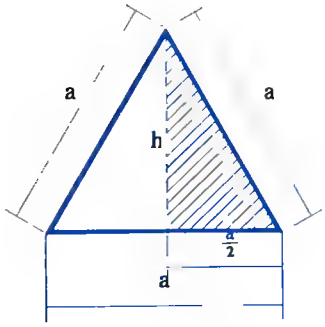
Tetraedro





Desarrollo del tetraedro

Su superficie es el área de una cara por cuatro caras que posee:



$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Así, pues, la superficie del tetraedro es:

$$S = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

$$\boxed{S = a^2\sqrt{3}}$$

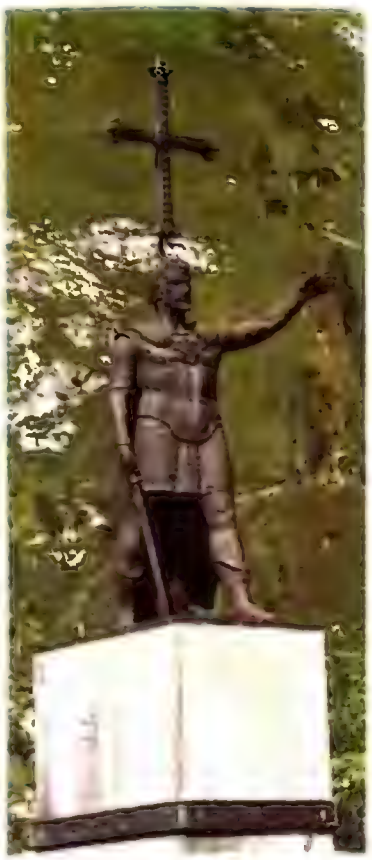
El meridiano sobre el que está situada la Gran Pirámide es el meridiano ideal buscado por los hombres de ciencia, es el que en nuestro hemisferio atraviesa la mayor extensión de tierras y en el opuesto exclusivamente las aguas del Océano Pacífico.

Por otra parte, la Gran Pirámide está a 1° 8' 78" del paralelo 30 (su latitud es de 29° 58' 51"). Esta diferencia es más insignificante de lo que parece, pues si el arquitecto la hubiese calculado de modo que un observador viese el polo celeste situándose en la base del monumento a una altura de 30° exactos, la habría emplazado teniendo en cuenta la reflación de la atmósfera en los 29° 58' 22" con sólo 29" de diferencia.

Sorprende esta exactitud.

Multiplicando el alto de la Pirámide 148,208 por π (pi) da 931,22 m, que es la longitud total de la base de la Pirámide. Multiplicando la altura por un millón da 148.208.000, que es la distancia de la Tierra al Sol que se consideró correcta hasta el año 1896. La medida lineal empleada en la Pirámide fue el codo sagrado; multiplicando éste por diez millones da 1.356.600 m, longitud del radio polar de la Tierra. Multiplicando el codo por los días del año sideral sale la longitud de un lado de la base de la Pirámide.

De todo esto se deduce los grandes conocimientos matemáticos y astronómicos que poseían los sacerdotes egipcios y que se conocía como la "ciencia secreta de los faraones".



Corría el año 711 cuando las tropas musulmanas al mando de su general Muza venció a orillas del río Guadalete a todo el ejército de Rodrigo, rey visigodo, que perdió su reino después de esta derrota.

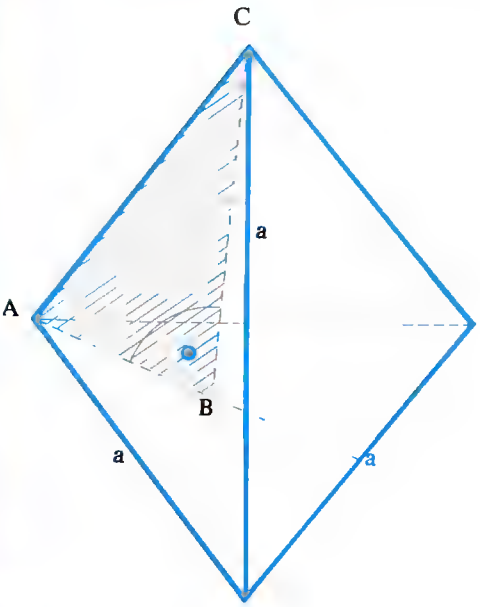
Los africanos al mando del moro Muza y de Tarik se apoderaron de toda la península que incorporaron al califato de Damasco creando una capital para estas tierras en la ciudad de Córdoba.

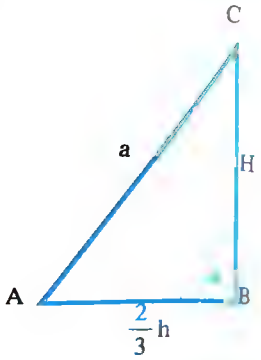
De esta conquista de la totalidad de nuestra Península sólo se salvó una pequeña zona asturiana habitada por los astures, raza indómita y amante de la libertad, que rechazó al invasor. Uno de ellos, de familia noble, llamado Pelayo, que perteneció a la guardia de Rodrigo, se ganó el respeto de los naturales y fue proclamado su caudillo. Este hecho no preocupó demasiado al gobernador musulmán instalado en lo que hoy es Gijón.

Pelayo y sus seguidores se retiraron a los frondosos bosques del macizo de los Picos de Europa.

Su volumen es el área de su base por la altura, dividido por tres.

En el triángulo rayado de la figura obtendremos por Pitágoras la altura del tetraedro en función de su arista.





$$\frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$a^2=H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\rightarrow H^2=a^2-\frac{3a^2}{9}\rightarrow H^2=$$

$$=\frac{9a^2-3a^2}{9}\rightarrow H^2=\frac{6a^2}{9}\rightarrow H=\sqrt{\frac{6a^2}{9}}$$

$$\boxed{H=\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

luego el volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{S_B\cdot H}{3}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}}{3}=\frac{a^3\sqrt{18}}{36}=\frac{a^3\,3\sqrt{2}}{36}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\boxed{V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

Ej.: Hallar el área de un tetraedro regular, sabiendo que su altura mide 4 cm.

El problema más inmediato es el conocer la arista del tetraedro; luego vamos a intentar buscar alguna relación entre su altura y su arista, ésta está deducida anteriormente:

$$H=\frac{a\sqrt{3}}{3}\rightarrow 4=\frac{a\sqrt{3}}{3}\rightarrow a=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\text{ cm}$$

luego su área es:

$$S=a^2\sqrt{3}=(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}=48\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Ej.: Calcular el área y el volumen de un tetraedro regular de 5 cm de arista.

Por aplicación directa de las fórmulas:

$$S = a^2\sqrt{3} = 5^2\sqrt{3} = 25\sqrt{3}\ cm^2$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{5^3\sqrt{2}}{12} = \frac{125\sqrt{2}}{12}\ cm^3$$

Ej.: La superficie de un tetraedro regular es $4\sqrt{3}\ m^2$. Calcular su arista y su volumen.

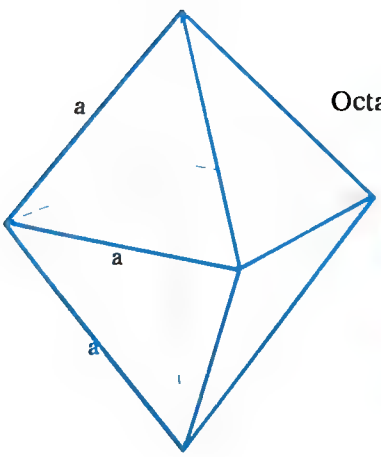
Con el dato de la superficie, calculamos la arista:

$$S = a^2\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \rightarrow a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = 2\ m$$

Aplicando la fórmula del volumen, obtendremos:

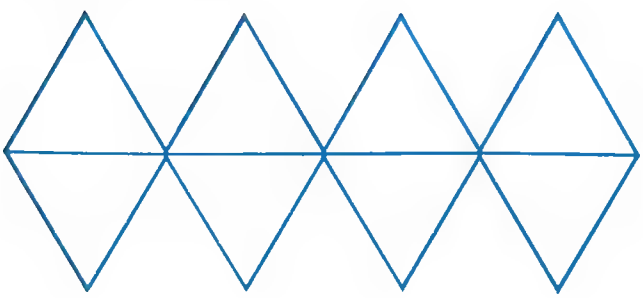
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ m^3$$

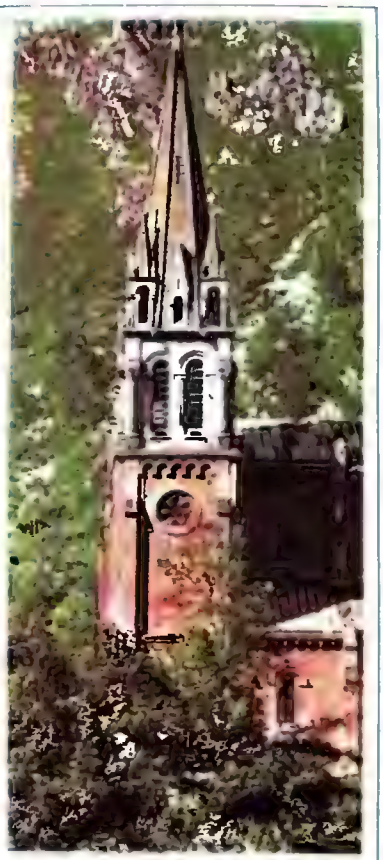
C.—Octaedro



Octaedro

Desarrollo del octaedro





Hacia el año 722, el emir Aubasa organizó una expedición que, al mando del jefe bereber Algama, se propuso acabar con él y con sus seguidores; pero éstos, conocedores del terreno, condujeron al enemigo hacia la zona de Covadonga donde se dio la batalla que derrotó definitivamente a los musulmanes.

Pelayo fue coronado rey de Asturias y murió de muerte natural en el año 737.

La primera capital de lo que luego sería España se estableció en Cangas de Onís. Allí Pelayo y sus caballeros se dedicaron a crear las bases de su reino. Durante dieciocho años el pequeño territorio que antiguamente perteneció a los astures fue el que salvó a España de pertenecer totalmente al Islam. Por eso, eminentes historiadores mantienen que nuestro país nació en Covadonga y allí entre aquellos riscos y en aquella gruta está la cuna de España.

Cuatro turistas franceses, al llegar a España, su pensamiento, además de visitar y admirar el arte español, está puesto en la gastronomía. No saben absolutamente nada de español y quieren reconocer y traducir lo antes posible una carta de un restaurante que consta de 15 platos.

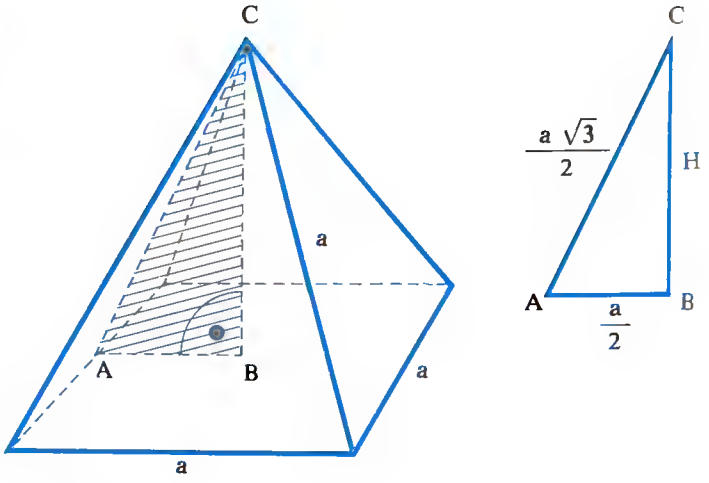
Entre ellos va un aficionado a las matemáticas, y después de cavilar un instante les dice que él sólo necesita TRES días (dos comidas por día) para distinguir y diferenciar los 15 platos de que consta la carta del restaurante del hotel. ¿Cómo lo hizo?

LA SOLUCION EN PAG. 544.

Su superficie es el área de una de las caras (triángulo equilátero), multiplicada por ocho (obsérvese que son dos pirámides iguales unidas por la base):

$$S = 8\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\,2\sqrt{3} \quad ; \quad \boxed{S = a^2\,2\sqrt{3}}$$

Su volumen es el de una de las pirámides multiplicado por dos (dos pirámides iguales) y el volumen de una pirámide es el área de su base por su altura dividido por tres.



En el triángulo rectángulo, rayado en la figura, se obtiene la altura de la pirámide, en función de su arista, mediante la aplicación de un Teorema de Pitágoras.

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{3a^2}{4} = H^2 + \frac{a^2}{4} \rightarrow H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$H^2 = \frac{2a^2}{4} \rightarrow H = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

luego el volumen del tetraedro es:

$$V = 2\frac{S_B \cdot H}{3} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \quad \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$$

Ej.: Hallar el área y el volumen de un octaedro regular de 3 cm de arista.

$$S = a^2\,2\sqrt{3} = 3^2 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{3^3\sqrt{2}}{3} = \frac{27\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2}\ \text{cm}^3$$

Ej.: La superficie del octaedro regular es $8\sqrt{3}$ cm^2. Calcular su arista y su volumen.

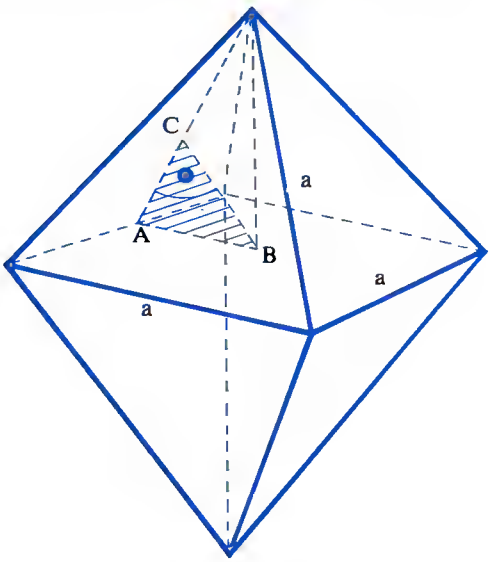
$$S = a^2\,2\sqrt{3} \rightarrow 8\sqrt{3} = a^2\,2\sqrt{3} \rightarrow a^2 = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \rightarrow a^2 = 4$$

$$a = \sqrt{4} \rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

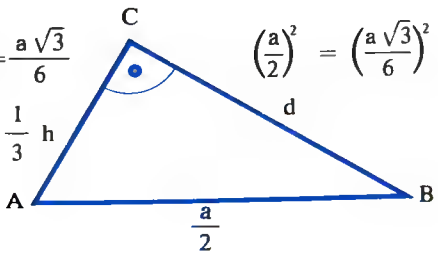
Su volumen por aplicación de la fórmula es:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{2^3\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{cm}^3$$

Ej.: Calcular la distancia del centro de un octaedro regular a una de sus caras, sabiendo que su arista es de 2 cm.



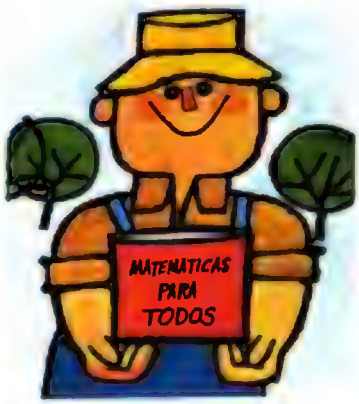
En el triángulo rectángulo rayado en la figura, mediante un teorema de Pitágoras, obtendremos la distancia $\overline{BC}$ a una de sus caras.



$$\frac{1}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + d^2 \rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{36} + d^2$$

$$d^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{9a^2 - 3a^2}{36} \rightarrow d^2 = \frac{6a^2}{36} \rightarrow d^2 = \frac{a^2}{6} \rightarrow d = \sqrt{\frac{a^2}{6}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



El cine de dibujos animados es el procedimiento más complicado que existe en todas las técnicas visuales; pero en su favor tiene la posibilidad de poder realizar por este medio las escenas más fantásticas e inverosímiles.

Como sistema didáctico no tiene igual. Con él podemos ver el interior de un motor en pleno funcionamiento y también películas científicas en las que nos presentan los viajes espaciales y las ciudades satélites del futuro.

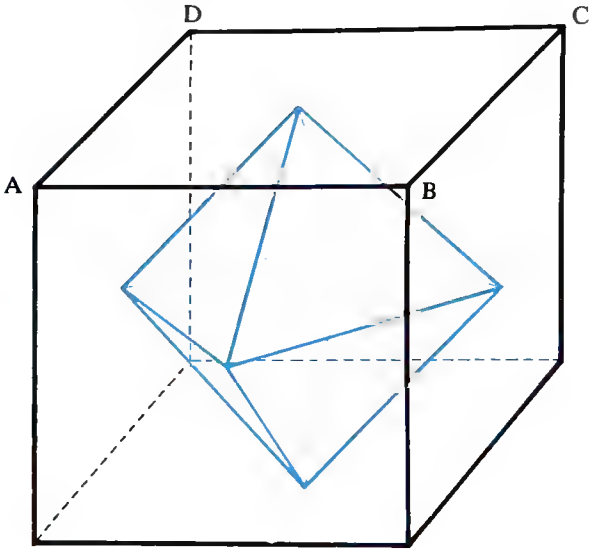
Cuando queremos hacer una película normal, fotografiamos en las condiciones adecuadas la escena o la persona que se mueve en ella. En las películas de dibujos animados se requiere pintar el fondo y después una sucesión ordenada del movimiento en diferentes placas transparentes; luego una cámara especial fotografía imagen por imagen, teniendo en cuenta que la velocidad cinematográfica normal es de 24 imágenes por segundo y la duración de una película comercial es de 90 minutos, tenemos que llenar de dibujos 129.600 fotogramas.

Esta cantidad se reduce por los tiempos con figuras paradas y algunas repeticiones de imágenes; pero de todas formas se puede comprender el trabajo enorme que supone esta técnica.

Así que sustituyendo la arista $a = 2$ en la expresión obtenida, deduciremos la distancia pedida.

$$d = \frac{a\sqrt{6}}{6} \rightarrow d = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}\text{ cm}$$

Ej.: El área total de un cubo es de 486 cm^2. Averiguar cuál es el volumen del octaedro cuyos vértices son los centros de las caras de dicho cubo. Obsérvese la figura:

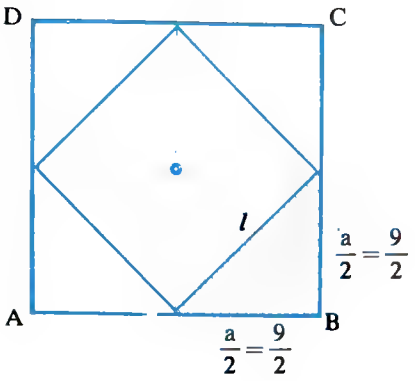


Después que hayamos localizado la arista del cubo con el dato de su superficie, deberemos de hallar la arista del octaedro para poder hallar su volumen.

$$S = 6a^2 \rightarrow 486 = 6a^2 \rightarrow a^2 = \frac{486}{6} \rightarrow a^2 = 81 \rightarrow a = \sqrt{81} = 9\text{ cm}$$

Obsérvese cómo calculamos la arista del octaedro, proyectando éste sobre el plano ABCD de la figura.

En el triángulo rayado de la figura aplicamos un teorema de Pitágoras.



$$l^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow l^2 = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4} = \frac{81}{2}$$

$$l = \sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}\text{ cm}$$

Hasta el principio del siglo XIX era costumbre que los señores y príncipes europeos tuvieran a su servicio curanderos, alquimistas, relojeros y constructores de autómatas. Se buscaba el movimiento continuo, la fabricación del oro y la salud eterna. Cierto que ninguno logró su meta; pero también es verdad que sin ellos no se hubiera inventado la porcelana, el cristal fino, ni se habría llegado a desarrollar la mecánica de precisión y la relojería. Un ejemplo es el primer motor de explosión construido por Denis Papin, que fracasó porque se había adelantado a su tiempo.

Citando otra vez a Leonardo da Vinci, sus contemporáneos consideraban como lo más asombroso de cuanto había creado este genio no sus pinturas sino un autómata, un león que había construido para Francisco I; este animal andaba de un lado para otro y parecía de verdad.

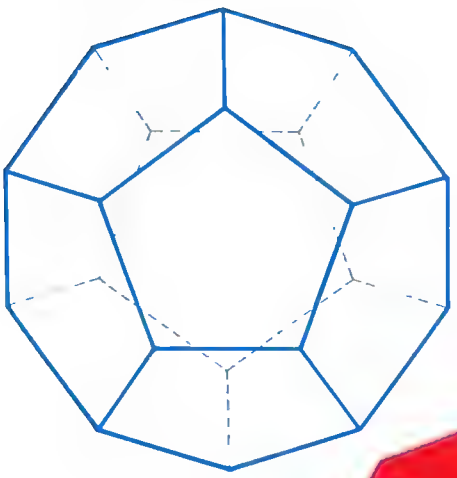
Con el desarrollo de las ciencias y el conocimiento más exacto de los materiales se dio peso a la industria moderna.

luego teniendo el lado l del octaedro, obtendremos su volumen:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \rightarrow V = \frac{\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^3\sqrt{2}}{3} = \frac{729 \cdot \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot 3} =$$

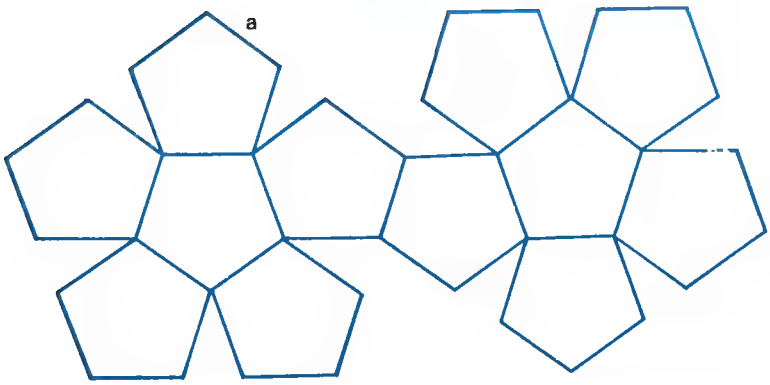
$$= \frac{729 \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{2}}{8 \cdot 3} = \frac{729 \cdot 2 \cdot 2}{24} = \frac{729}{6} = \frac{243}{2}\,cm^3$$

D.—Dodecaedro



Dodecaedro

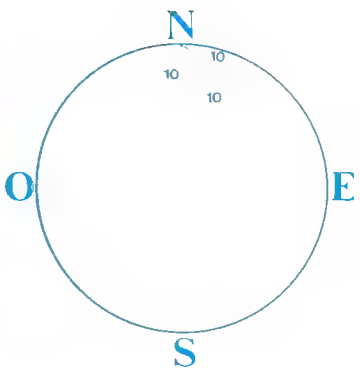
Desarrollo del dodecaedro



Solucion al problema de la carreta de la pág. 498.

El eje delantero de las carretas tiene las ruedas más pequeñas que las del eje trasero. Bien, al ser más pequeñas dan más vueltas al andar que las del eje trasero en el mismo recorrido, por lo tanto, a mayor número de revoluciones el desgaste del eje será mayor.

Solución al problema del oso de la pág. 500.



Anda 10 Km hacia el Sur, luego 10 Km hacia el Este y luego otros 10 Km al Norte y está en el punto de partida A, no puede ser otra cosa que esté en los POLOS. Al estar en los polos los osos no pueden ser más que BLANCOS.

Solución al probleme de hermanos y hermanas de la pág. 508.

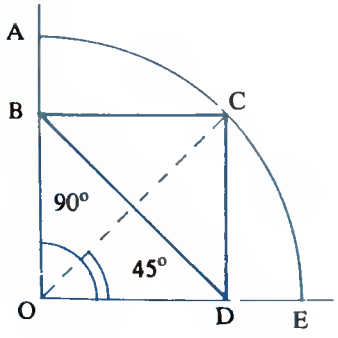
Solución: 4 hermanas y 3 hermanos.

Veamos: Habla una hermana y dice: tengo tantos hermanos como hermanas (3 y 3) ¿no?

La segunda proposición ..... pero mis hermanos (que son 3) tienen la mitad de hermanos que de hermanas. Cualquiera de los hermanos al decir esta afirmación tiene **dos** hermanos y **cuatro** hermanas.

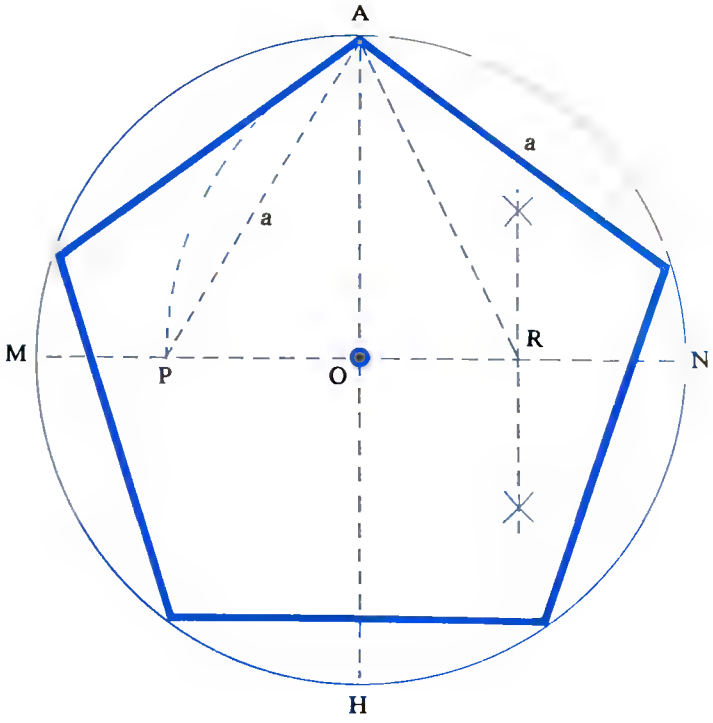
Solución al problema del rectángulo inscrito de la pág. 508.

Al hacer el dibujo, lo hemos hecho con toda intención. Si en vez de trazar la diagonal $\overline{BD}$, hubiéramos trazado la $\overline{OC}$, entonces veríamos que $\overline{OC} = \overline{BD}$, por ser las diagonales del rectángulo y que $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OE}$, y son radios del cuadrante del círculo, por lo tanto son iguales.



Para calcular el área o volumen de un dodecaedro regular en función de su arista, formado, como sabemos, por caras que son pentágonos regulares, es necesario un conocimiento previo de la construcción geométrica de un pentágono regular, construcción que se expone a continuación.

Para construir un pentágono regular se trazan diámetros perpendiculares AH y MN que se cortan en un punto O, que es el centro de la circunferencia circunscrita al pentágono. Se traza la mediatriz del radio ON, que corta a éste por el punto R. Haciendo centro en R y con radio RA, se traza un arco que corta el diámetro MN en P. La recta AP es, pues, el lado del pentágono, que, llevado cinco veces sobre la circunferencia, define la figura gráficamente.

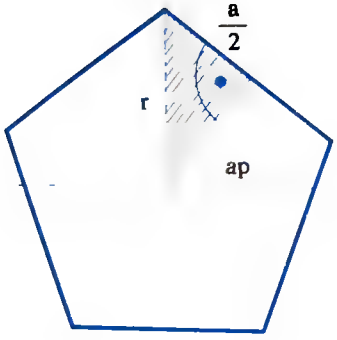


Vamos, pues, a calcular la superficie de un dodecaedro regular, en función de su arista a. Para ello pensemos que el área de una de sus caras (pentágonos) por la cantidad de las que posee (12 caras) nos reproducirá el área del dodecaedro. Es decir:

$$S = 12\frac{P \cdot ap}{2} = 12\frac{5a \cdot ap}{2} = 30 \cdot a \cdot ap \qquad (1)$$

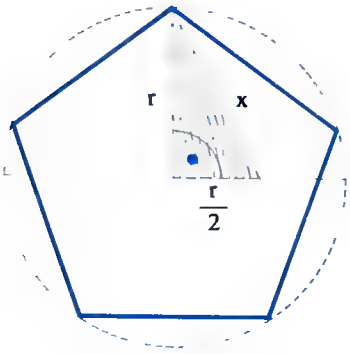
Como se observa, necesitamos calcular la apotema del pentágono (ap) en función del lado de éste (a).

Obsérvese las construcciones y cálculos siguientes, basados fundamentalmente en la construcción gráfica de un pentágono regular.



$$r^2 = ap^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

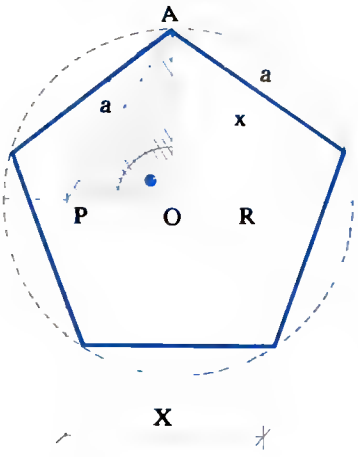
$$ap^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} \qquad (2)$$



$$x^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} =$$

$$= \frac{4r^2 + r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$$

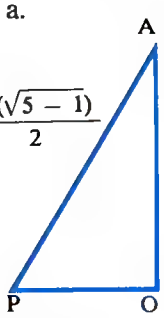
$$x = \frac{\sqrt{5r^2}}{4} = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$



$$\overline{PO} = \overline{PR} - \overline{OR} = x - \frac{r}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{2} -$$

$$- \frac{r}{2} = \frac{r\sqrt{5} - r}{2} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

Obsérvese el triángulo rayado de esta última construcción geométrica, de donde despejaremos en función de a.

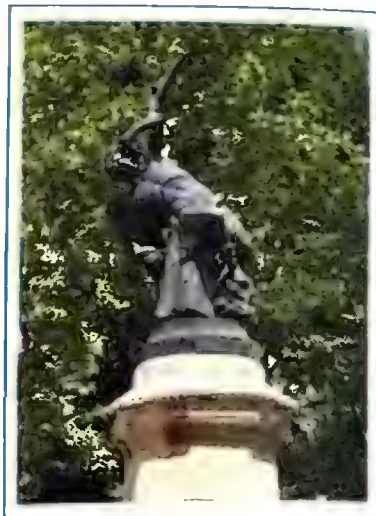


$$a^2 = r^2 + \left[\frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}\right]^2 \rightarrow a^2 = r^2 + \frac{r^2(\sqrt{5} - 1)^2}{4}$$

$$4a^2 = 4r^2 + r^2(\sqrt{5} - 1)^2 \rightarrow 4a^2 = r^2[4 + (\sqrt{5} - 1)^2]$$

$$4a^2 = r^2[4 + 5 + 1 - 2\sqrt{5}] \rightarrow 4a^2 = r^2[10 - 2\sqrt{5}]$$

$$r^2 = \frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}} \rightarrow r = \sqrt{\frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$



El "Angel caído", preciosa estatua debida al escultor Ricardo Bellver, que se encuentra situada en el parque madrileño de El Retiro desde el año 1BB5, es única en el mundo. En ella se muestra el momento en que el ángel soberbio y rebelde es arrojado al abismo por rebelarse ante su creador. Esta afirmación cristiana que la Iglesia nos enseña tiene su paralelismo en todas las religiones.

Los romanos adoraban a los espíritus de los muertos a los que llamaban *manes*. Los demonios han tenido diversos nombres y concepciones. Los escandinavos los llamaban *gnomos*; los musulmanes, *jinn*; en el Japón, *omi* y *ratkshas* en la India.

Hay quien mantiene la existencia de gran número de espíritus malignos, invisibles para los hombres. El origen de esta idea se encuentra en la creencia de que los espíritus de los difuntos vagan errantes por el mundo.

La mitología antigua establecía la distinción entre demonios malos, enviados por Satanás, y los demonios buenos, que más tarde serían convertidos en ángeles de la guarda. Esta distinción influyó en las ideas judías al respecto y, en consecuencia, sobre la teología cristiana posterior. El estudio de la naturaleza de los demonios ha dado nombre a una ciencia llamada "Demonología".

luego, sustituyendo el valor de r en la expresión (2) obtendremos la apotema del pentágono en función del lado a.

$$ap^2 = \frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4} = \frac{16a^2 - a^2(10 - 2\sqrt{5})}{4(10 - 2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{a^2[16 - (10 - 2\sqrt{5})]}{4(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{a^2[16 - 10 + 2\sqrt{5}]}{4(10 - 2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{a^2(6 + 2\sqrt{5})}{4(10 - 2\sqrt{5})} \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{a^2(60 + 12\sqrt{5} + 20\sqrt{5} + 20)}{4[10^2 - (2\sqrt{5})^2]} =$$

$$= \frac{a^2(80 + 32\sqrt{5})}{4(100 - 20)} = \frac{a^2(80 + 32\sqrt{5})}{320} = \frac{a^2(5 + 2\sqrt{5})}{20}$$

luego:

$$ap = \sqrt{\frac{a^2(5 + 2\sqrt{5})}{20}} = \frac{a\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{20}} = \frac{a\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10}$$

llevando el valor del apotema del pentágono a la expresión (1) obtendremos definitivamente el valor del área del dodecaedro regular.

$$S = 30 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{10} = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad ;$$

$$\boxed{S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}$$

El cálculo del volumen es más complejo y se obtiene por la fórmula:

$$\boxed{V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}}}$$

Generalmente el volumen es obtenido dividiendo el poliedro en pirámides de vértice el centro del poliedro.

Ej.: Hallar el área y el volumen de un dodecaedro de 6 cm de arista.

Aplicando las fórmulas se obtiene:

$$S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 3 \cdot 6^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} =$$

$$= 108\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\ \text{cm}^2$$

Una de las tres cuevas prehistóricas más importantes del mundo es la conocida por "Cueva de Tito Bustillo", en Asturias. Desde la misma orilla del río Sella se entra en ella por un largo túnel. Esta entrada, construida recientemente, sustituye a la primitiva, situada en una impresionante sima cerca de Ribadesella.

Fue descubierta hace pocos años.

En 1968, un grupo de espeleólogos en el que iba Celestino Bustillo inició la exploracion, y al levantar éste la cabeza para aumentar la llama de carburo que llevaba en su casco de minero quedó maravillosamente sorprendido con la famosa cabeza de caballo trazada con líneas negras en el techo de la cueva. En el gran panel están pintados varios caballos, un reno, bisontes y ciervos; existen también pinturas en otros muchos lugares de la cueva, difícilmente identificables.

Desde su descubrimiento, estas cuevas han sido la admiración de los estudiosos. En las numerosas excavaciones se han encontrado adornos, utensilios de uso normal e incluso un bastón de mando realizado en hueso.

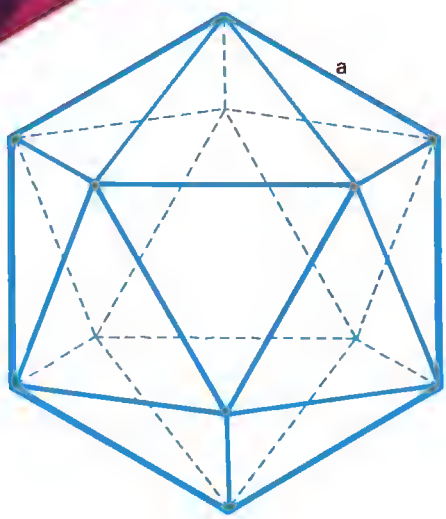
Unos días después de este descubrimiento, y al salir de otra cueva, tuvo la desgracia de morir en un accidente el famoso Tito Bustillo, poniéndole su nombre a ésta en homenaje póstumo.

Sus largas y magníficas galerías, las cascadas de estalactitas, sus altas bóvedas, sus suelos limpios y arenosos y su río subterráneo hacen suponer que fueron habitadas por muchas generaciones de tribus sedentarias.

$$V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}} = \frac{5 \cdot 6^3}{2}\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}} =$$

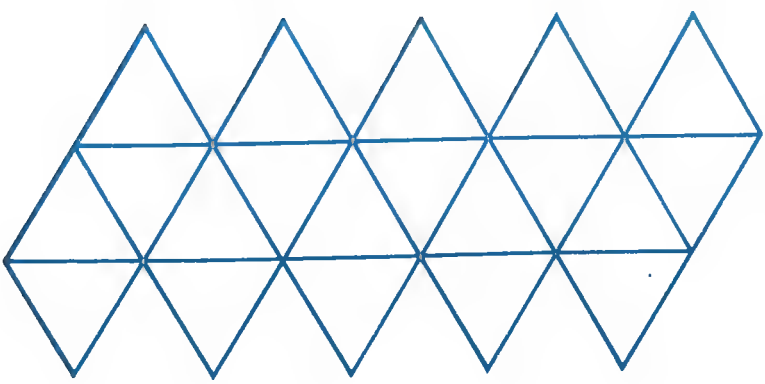
$$= 540\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}}\,cm^3$$

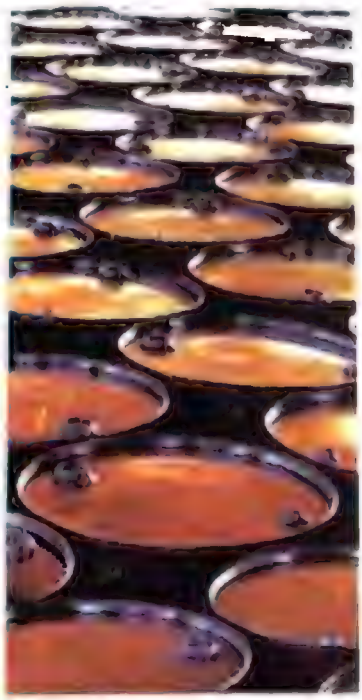
E.—Icosaedro



Icosaedro

Desarrollo del icosaedro





Solamente después de haber terminado su labor el equipo de matemáticos, es cuando los ingenieros pueden comenzar la construcción de sus ingenios. Esto es de aplicación, además de la industria de la aviación, a la electrónica y la técnica relacionada con la investigación espacial.

La importancia de las matemáticas se ha puesto de manifiesto últimamente en la carrera espacial.

Se sabe con toda certeza que el "Mariner I", valorado en veinte millones de dólares, se desvió de su trayectoria y se le tuvo que destruir, porque un pequeñísimo error tipográfico en una de las ecuaciones con que programaron los ordenadores metió un signo cambiado lo que fue suficiente para dar al traste con todos los otros trabajos perfectamente realizados.

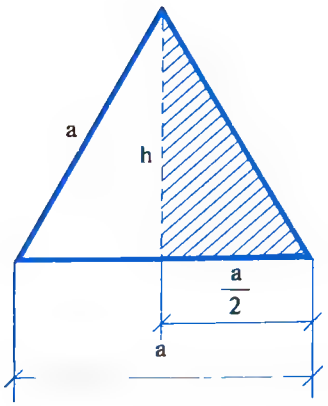
Las matemáticas aplicadas pueden convertir las abstracciones de la matemática pura en hechos prácticos, y tienen capacidad para expresar problemas verdaderos en fórmulas matemáticas de aplicación desde proyectar automóviles, predecir resultados de elecciones, hacer estadísticas, hasta hacer evaluaciones sobre la conducta humana.

El fútbol es realmente un juego tan antiguo como el hombre.

Algunos arqueólogos han pretendido remontar su origen a la época troglodita. Si bien es cierto que las normas y el reglamento son muy recientes, algo muy parecido se jugaba en las olimpiadas griegas y en los estadios romanos.

El "Harpaston" aseguran que ya se jugaba con los pies exclusivamente, si bien con una pelota pequeña que cada bando trataba de llevar a la meta contraria. Se sabe que éste era un juego muy violento y que el número de jugadores podía ser ilimitado, aunque siempre un número igual por cada uno de los bandos. Cuando los romanos adoptaron los usos y costumbres de los griegos, hicieron suyo también este juego, que se consideraba un buen medio de adquirir fortaleza y resistencia del cuerpo. Sin embargo al César Augusto no le gustaba y ordenó que sus legiones no lo practicasen y se empleasen en tareas más rudas. Pese a esta prohibición, en los campamentos se practicaba con mucho agrado por los soldados en las horas de descanso y servía para aligerar sus tensiones y dar rienda suelta a sus instintos violentos; también era medio para cruzar entre ellos gran cantidad de apuestas.

Para calcular el área de un icosaedro hallaremos el área de una de sus caras y multiplicaremos por veinte caras que tiene.



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

luego la superficie del icosaedro es:

$$S = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3} \rightarrow \boxed{S = 5a^2\sqrt{3}}$$

El volumen del icosaedro se obtiene mediante la aplicación de la fórmula siguiente:

$$\boxed{V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})}$$

Generalmente el volumen es obtenido dividiendo el poliedro en pirámides de vértice el centro del poliedro.

Ej.: Hallar el área y el volumen de un icosaedro de 24 m de arista:

$$S = 5a^2\sqrt{3} = 5 \cdot 24^2\sqrt{3} = 2.880\sqrt{3}\ m^2$$

$$V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}) = \frac{5 \cdot 24^3}{12}(3 + \sqrt{5}) = 5.760(3 + \sqrt{5})\ m^3$$

8.–TEOREMA DE EULER

En cualquier poliedro convexo, el número de vértices más el número de caras es siempre igual al número de aristas más dos.

$$C + V = A + 2$$

Llamamos **poliedros conjugados** a aquellos en los que el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro y como consecuencia del teorema de Euler, ambos tendrán el mismo número de aristas.

Ej.: El tetraedro es conjugado de sí mismo.

Ej.: El octaedro y el hexaedro son conjugados.

Ej.: También son conjugados el dodecaedro y el icosaedro.

NOTA.–Los centros de las caras de un poliedro regular son siempre los vértices de un poliedro conjugado.

Ej.: Hallar cuántos vértices tendrá un poliedro regular de 12 caras y 30 aristas aplicando el teorema de Euler.

$$C + V = A + 2 \rightarrow 2 + V = 30 + 2 \rightarrow 12 + V = 32$$

$$V = 32 - 12 = 20 \text{ vértices}$$

9.–ESTUDIO DE FIGURAS EN EL ESPACIO

Son las distintas figuras espaciales de más común uso, y son las que aportan tres dimensiones para que queden definidas.

En todas estas figuras es necesario distinguir tres tipos de datos:

– Area lateral (S*l*), es el área de los polígonos formados por sus caras laterales.

– Area Total (St), es el área lateral más los polígonos formados por su base o bases.

– Volumen o capacidad (V), es lo que "cabe" dentro de la figura en cuestión.

En general el volumen de cualquier figura es la superficie de su base por su altura, teniendo en cuenta que si la figura no acaba en "pico" (prismas, cilindros, ...) su volumen es el dicho y si la figura acaba en "pico" (pirámides, conos, ...) su volumen es el dicho dividido por tres.

NOTA.–Todas las figuras espaciales poseen un desarrollo que consiste en "cortar" la figura por una de sus aristas y extenderla en una superficie plana.

Tras la guerra de la independencia los objetos artísticos, tan celosamente guardados, fueron objeto de un expolio sin precedentes: en bloque fueron regalados a Lord Wellington nada menos que ciento setenta y cinco cuadros.

Por aquella época los Zares de Rusia descubrieron una gran afición por la pintura española; enviados especiales suyos llegaron aquí para adquirir cuadros a Godoy. Y hacia San Petesburgo salieron los que componían la gran colección del cónsul de Rusia en Cádiz y los que Fernando VII había regalado al entonces embajador ruso. También el Zar Alejandro I compró pinturas españolas a un coleccionista de Amsterdam, que le proporcionó cincuenta y tres cuadros de pintores españoles.

Los ingleses también se dejaron llevar por esta afición y a Londres fue a parar nuestra Venus del espejo, de Velázquez, y más tarde gran cantidad de pinturas de Murillo.

Las grandes colecciones formadas en los momentos que siguieron a la desamortización fueron en su mayor parte enviadas al extranjero.

Toda esta fabulosa galería de cuadros se dispersó por el mundo después de una famosa subasta de pintura española, realizada en casa de Christie de Londres.

REWARD

Recompensa

Se "busca" un número de tres cifras (unidad, decena y centena) de tal manera que al borrar o tapar la cifra de las centenas el número resultante (decena y unidad) sea la quinta parte del total y al borrar también la cifra de en medio (decena) además de la primera (centena), también el número resultante (unidad) sea la quinta parte del anterior (decena y unidad).

SOLUCION EN PAG. 560.

A.—Prisma

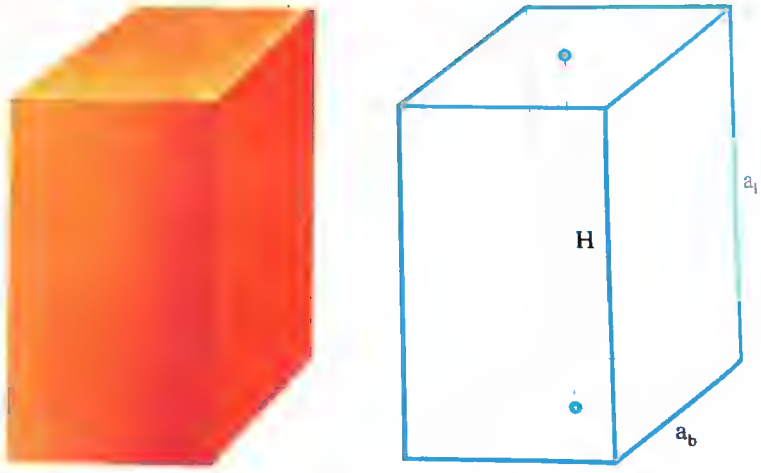
Se llama **superficie prismática** a cualquier figura formada por planos paralelos a una recta que producen intersecciones comunes dos a dos según rectas que reciben el nombre de **aristas laterales.**

Se entiende por **prisma** a la superficie prismática que es cortada por dos planos paralelos y secante a sus aristas laterales. Las secciones producidas por los planos paralelos en la superficie prismática reciben el nombre de **bases** y los lados de estas bases se llaman **aristas básicas o de la base.**

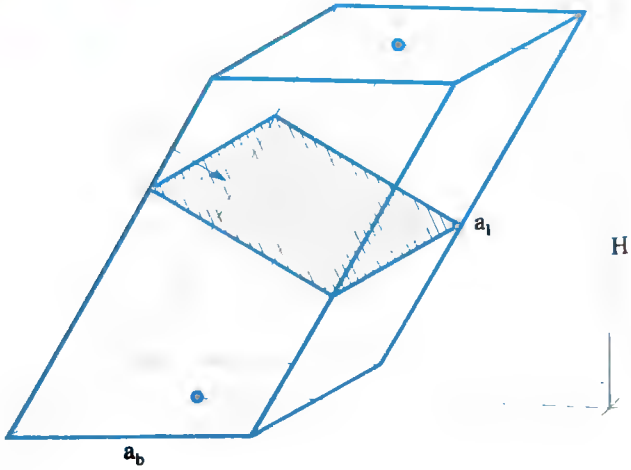
La distancia entre estas dos bases es precisamente la altura del prisma. Es decir, que en un prisma es en definitiva una figura en la que sus aristas laterales con paralelas y sus bases también paralelas, están formadas por polígonos.

Si los planos que contiene a las bases son perpendiculares a las aristas laterales, se dice que el prisma formado es un **prisma recto.**

Cuando los planos que contienen a las bases no son perpendiculares a las aristas laterales se dice que el prisma es un **prisma oblicuo** y la sección producida en estos por un plano perpendicular a las aristas recibe el nombre de **sección recta del prisma** (en los prismas rectos, la sección recta es igual que los polígonos de las bases).



Prisma recto



Sección recta

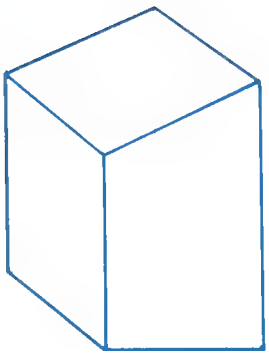
A aquellos prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se les llama **prismas regulares.**

Cualquier prisma oblicuo es equivalente a uno recto que tenga por base la sección recta y por altura la arista lateral.

En general los prismas se nombran con la palabra prisma seguida de la palabra que indica el polígono de sus bases: prisma triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.

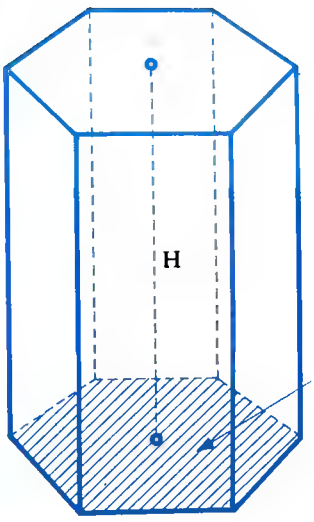
A los prismas cuadrangulares, cuyas caras laterales o básicas están formadas por cuadrados o rectángulos se les llama también **paralelepípedos u ortoedros,** es decir, a las figuras que son de la forma de un "libro".

A cualquier prisma que no tenga sus bases iguales se le denomina **prisma truncado.**



Vamos a estudiar, pues, las áreas laterales, totales y volumen de un prisma.

Prisma exagonal regular



Rembrandt fue contemporáneo de nuestro Velázquez, que era siete años mayor que aquél.

Hijo de un molinero de Leide, nació en 1606 y murió en 1669. A los catorce años ingresó en la academia para aprender el oficio de pintor. Al fallecer su padre se traslada a la ciudad de Amsterdam, donde trabaja durante cuarenta años seguidos; allí conoce la fama, la apoteosis, luego el desprecio de su arte y el de su persona y al fin la miseria y la muerte. Pero la ciudad no le ha olvidado; este genio de la pintura universal está en el lugar que le corresponde, en el Reijksmuseum donde sus cuadros se exponen espaciados, sin confusión, dándole a cada uno la importancia que se merece. Su obra maestra, titulada "La ronda de noche", que tardó tres años en pintar y por la que recibió 1.600 florines, tiene un título falso; no es una ronda nocturna sino el desfile de un grupo de guardias bajo un cielo claro. La limpiaron en el año 1946 y entonces al retirar la capa de barniz enranciado y oscurecido se pudo apreciar claramente esta circunstancia. Fue pintado en 1642 a los 37 años de edad del pintor.

El maestro del claroscuro y de los grabados al agua fuerte fue muy aficionado a representar su rostro; se catalogan sesenta y dos autorretratos de una obra total de unos cuatrocientos cuadros.

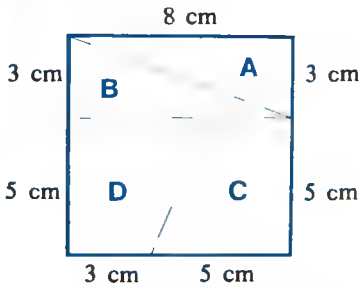
El autor de "Alicia en el país de las maravillas" fue el eminente matemático Charles Ludwige Dodgson, que publicó varias obras sobre las determinantes y la lógica simbólica.

A petición de su hija pequeña, que le pedía insistentemente que le contará algún cuento, fue inventando historias y sucedidos que más tarde recopiló en el libro citado y en otro titulado "A través del espejo".

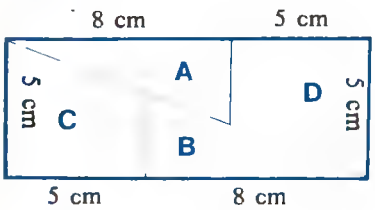
Para no mezclar sus actividades matemáticas y literarias adoptó para estas últimas el seudónimo de Lewis Carroll, siendo por él conocido mundialmente.

A este hombre amante de los números se debe la siguiente paradoja gráfica: Dibujamos un cuadrado perfecto de ocho cm. de lado; si hallamos su área será: $B^2 = 64\ cm^2$.

Cortamos la figura como indica el dibujo:



y volvemos a colocar los trozos de la forma indicada en este rectángulo.



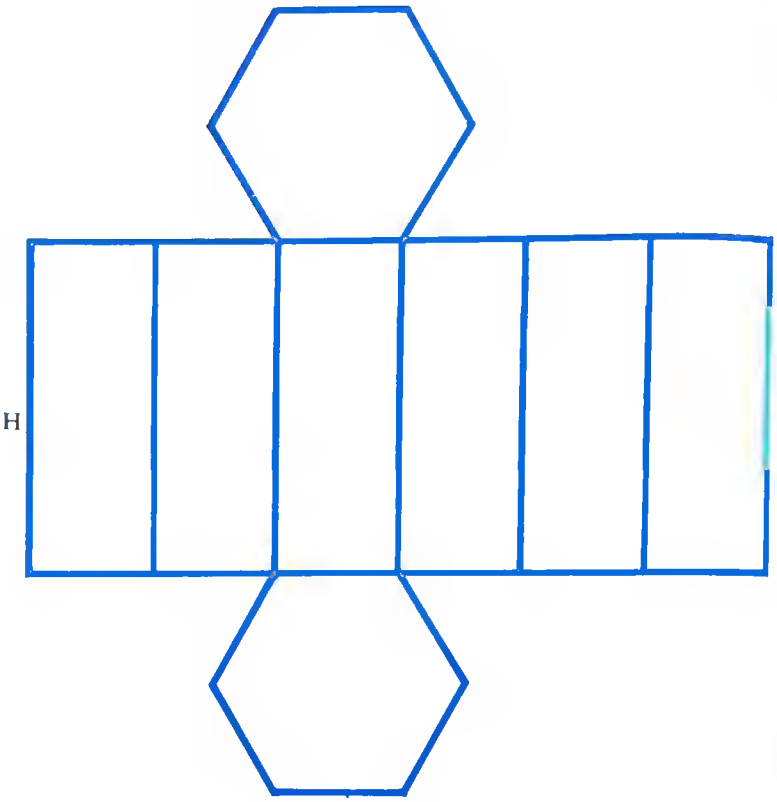
Entonces calculamos su superficie:

$B + 5 = 13\ cm; 13 \times 5 = 65\ cm^2$

Esto demuestra que aparentemente $65\ cm^2 = 64\ cm^2$.

SOLUCION EN PAG. 560.

Desarrollo del prisma

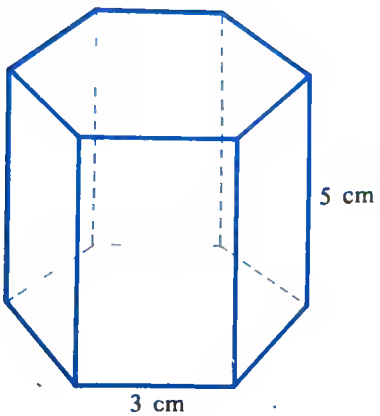


Sl = Superficie de sus caras laterales

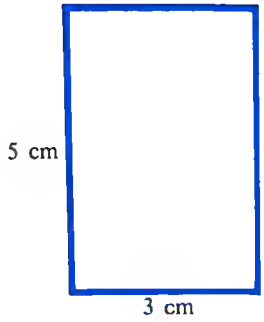
$St = Sl +$ superficie de sus bases $= Sl + 2\ Sb$

$V = Sb \cdot H$

Ej.: Las aristas lateral y básica de un prisma exagonal regular miden respectivamente 5 cm y 3 cm. Hallar su área lateral, su área total, su volumen y la medida del ángulo diedro formado por dos caras laterales contiguas.



Su área lateral la obtendremos hallando el área de una de sus caras laterales que son rectángulos y multiplicando ésta por seis caras iguales que posee el prisma hexagonal.

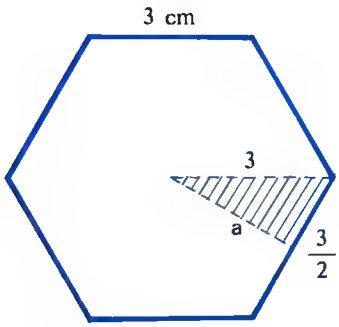


$$S = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2$$

$$Sl = 6 \cdot 15 = 90 \text{ cm}^2$$

Para hallar el área total habrá que sumar el área lateral, las áreas de las dos bases del prisma, que son iguales.

Vamos, pues, a hallar el área de una de sus bases, que como es un polígono regular será perímetro por apotema partido por dos (necesitamos calcular su apotema mediante un teorema de Pitágoras, en el triángulo rayado de la figura siguiente).



$$3^2 = a^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow 9 = a^2 + \frac{9}{4} \rightarrow a^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{36 - 9}{4}$$

$$a^2 = \frac{27}{4} \rightarrow a = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$Sb = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Así que el área total es:

$$St = Sl + 2Sb = 90 + 2\frac{27\sqrt{3}}{2} = 90 + 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Su volumen es entonces:

$$V = Sb \cdot H = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{135\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$$

Antes se consideraba el Código de Hammurabi la más antigua de las recopilaciones legales de la humanidad. Estudios posteriores han demostrado que ya existían normas morales plasmadas en tablillas de arcilla en algunas comunidades de Mesopotamia.

Sin embargo, ninguna de éstas llegó al nivel del código citado. Hammurabi ocupó el trono de Babilonia durante medio siglo, haciendo de este reino un auténtico imperio. Su capital, Babilonia, llegó a conseguir con sus famosos jardines colgantes el rango de "Segunda maravilla del Mundo".

El original del famoso código puede verse hoy en el museo del Louvre de París; consiste en una magnífica estela de dos metros y medio de alta, en diorita negra y con un peso de varias toneladas, escrito en cuneiforme; la lengua empleada fue el arcadio.

Consta de un preámbulo y doscientos ochenta y dos artículos, que determinan prohibiciones y las penas correspondientes; contiene también exposiciones generales sobre su aplicación. Está considerado como un importante legado que inició el desarrollo de la ley.

En las antiguas civilizaciones se despertó el deseo de atribuir a los números poderes mágicos que los astrólogos y aficionados a las ciencias ocultas extendieron, atribuyéndoles virtudes maléficas como el número trece, o benéficas como al número siete. Este número primo con características muy particulares, ha sido considerado siempre como un especial símbolo de la Virginidad y la Trascendencia; véamos, sin ánimo de agotar, los usos del citado número siete. Siete son los pecados capitales y siete son las virtudes; siete los sacramentos; siete las últimas palabras de Cristo; siete los dolores y gozos de la Virgen; siete brazos tiene el candelero de Jerusalem, imagen de la religión judía; siete los días (o períodos de creación); el Antiguo Testamento nos habla de siete años de vacas gordas y siete de vacas flacas; siete los dones del Espíritu Santo; un año sabático se compone de siete años normales; siete puertas y círculos tiene el Infierno según Dante; siete fueron los sabios de Grecia y las columnas de la Sabiduría; siete los colores del arco iris; siete estrellas tiene la Osa Mayor y el punto cardinal Norte se conoce también por un Septentrión; un cuarto lunar se desarrolla en siete días; en música se hace uso de la séptima ascendente de la escala con sus variantes; se llama Septena al conjunto de siete cosas por orden y Septimania fue el territorio donde se establecieron los veteranos de la séptima legión; el cine está considerado como el séptimo arte, etc.

Para hallar el diedro de dos caras laterales contiguas obsérvese por proyección que su medida es la misma que forman dos aristas básicas contiguas. Luego se trata de hallar uno de los ángulos interiores de un exágono regular.

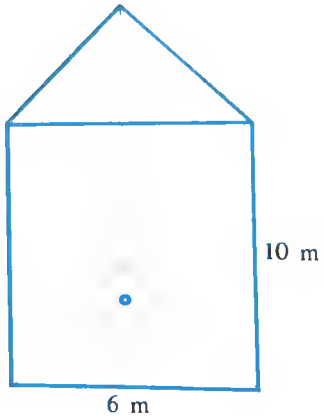
La suma de todos los ángulos interiores de un polígono regular vale $2(n - 2)$ rectos.

$$S_i = 2(n - 2) \text{ rectos} = 2(6 - 2) \text{ rectos} = 8 \text{ rectos} = 8 \cdot 90 = 720^\circ$$

y como todos son iguales, bastará dividir 720° entre seis que son:

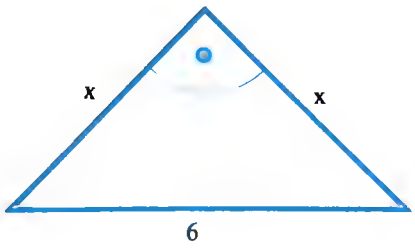
$$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$

Ej.: La base de un prisma de 10 m de altura es un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa mide 6 metros. Hallar su volumen.



Hallaremos la superficie de su base, necesaria para hallar el volumen.

La superficie de un triángulo rectángulo es, como sabemos, el producto de sus catetos dividido por dos. Por Pitágoras hallaremos los catetos que son iguales.



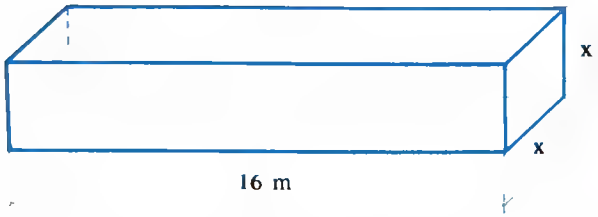
$$6^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 36 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$Sb = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ m}^2$$

Luego su volumen es:

$$V = Sb \cdot H = 9 \cdot 10 = 90 \text{ m}^3$$

Ej.: Una viga de madera tiene una longitud de 16 m y un volumen de 160 m^3. Hallar el perímetro de la sección recta o base, sabiendo que ésta es un cuadrado.



Para hallar el perímetro de su base, necesitamos saber el lado del cuadrado x que forma su base, elemento que calcularemos con el dato de su volumen.

$$V = Sb \cdot H \rightarrow 160 = x^2 \cdot 16 \rightarrow x^2 = 10 \rightarrow = \sqrt{10} \text{ m}$$

Luego su perímetro vale:

$$P = 4x = 4\sqrt{10} \text{ m}$$

Ej.: En un paralelepípedo u ortoedro sus tres dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 12 y su suma es de 38 dm. Hallar dichas dimensiones, el área total, el volumen y la diagonal del ortoedro.

Suponiendo que las tres dimensiones sean x, y, z, plantearemos un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{12} \\ x+y+z=38 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4} \\ \dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{12} \\ x+y+z=38 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x=\dfrac{3y}{4} \\ \\ \rightarrow z=\dfrac{12y}{4}=3y \end{array}$$

Sustituyendo x, z en la tercera ecuación:

$$\frac{3y}{4} + y + 3y = 38 \rightarrow 3y + 4y + 12y = 152$$

$$19y = 152 \rightarrow y = \frac{152}{19} = 8 \text{ dm}$$

$$x = \frac{3y}{4} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6 \text{ dm}$$

$$z = \frac{12y}{4} = \frac{12 \cdot 8}{4} = 24 \text{ dm}$$

Los gladiadores fueron predecesores de los ídolos deportivos que hoy llenan las páginas de los periódicos y que todos admiramos por sus grandes hazañas.

La necesidad que los romanos tuvieron de entretener al pueblo, los llevó a perfeccionar sus juegos y a construir estadios. En todas las ciudades de su imperio se disputaban combates, llegando los vencedores, en una terrible eliminatoria, hasta los juegos de Roma, donde el emperador podía hacerlos ricos, libres si no lo eran, y colmarlos de grandes honores si gustaba de su valentía y decisión. En aquella época existían escuelas especiales para gladiadores donde cada cual se especializaba en la modalidad que prefería; así había: "Bestiarius", el que luchaba con las fieras; "Retiarius", el que llevaba red y tridente; "Mirmillo", que tenía un casco con adorno de un pez y desarrollaba el arte de la esquiva; el "Threx", muy popular, tenía un escudo redondo y un gran espadón; el "Andabala", que luchaba a caballo y llevaba un casco que le cubría totalmente la cabeza y finalmente el "Laquearius", cuya arma era un lazo que manejaba con gran habilidad.

Al fin de los combates el público, y en última instancia el emperador, tenían la facultad de decidir la suerte del vencido levantando el dedo pulgar en señal de perdón o apuntando con él al suelo en señal de muerte.

OTRO DE HERENCIAS

Una anciana, al morir dejó heredero universal a su nieto, de toda su fortuna. Esta se componía de una cuenta corriente saneada y de un lujosísimo hotel con jardines, terrazas, campos deportivos, etc.

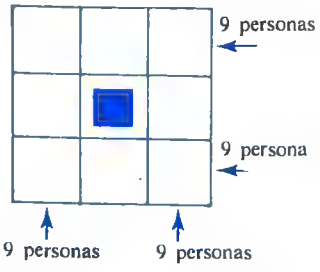
Consistía la edificación en planta, sótanos con servicios de todas clases y habitaciones para el personal del hotel y las cocinas. La planta baja, de comedor y salón de baile, recepciones y homenajes..., pero bueno, esto importa poco, lo que importa es que el piso primero sólo estaba destinado a las habitaciones de los clientes del hotel, o sea, del negocio propiamente dicho.

Por supuesto y aunque aquí vamos a poner habitación, cada una de estas "habitaciones", era una verdadera vivienda, consistente en: salón, despacho, servicio, cuarto de baño, etc.

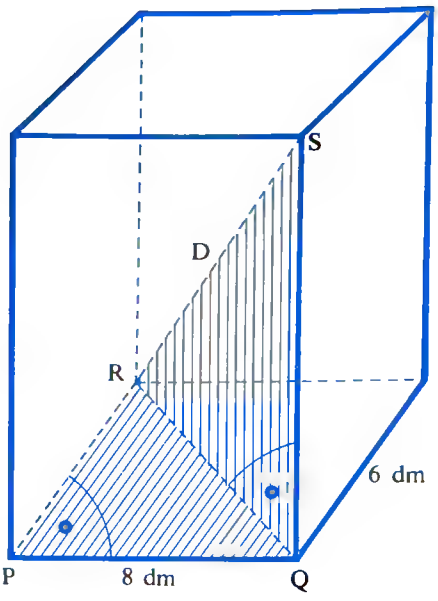
Durante todo el año dicho hotel estaba muy solicitado quizá por esto, porque era enormemente caro. Tenía el hotel OCHO apartamentos en la forma indicada en el plano adjunto A. En la parte del centro, la escalera y ascensores.

La condición más importante que le puso su abuela al morir (ya que sabía de la ambición y del amor al dinero de su nieto), era que cada una de sus alas, y sumados los clientes del hotel no fueran nunca más de NUEVE personas las que estuvieran viviendo allí. La abuela pensó que bien anchas podían estar TRES personas en cada una de las habitaciones o viviendas. Si no se cumplía este requisito, los abogados de la difunta tenían orden de que el hotel pasará a ser propiedad del Estado.

El nieto, sagaz como pocos, comenzó a realizar cálculos y planos hasta que vio la trampa legal que podía hacer.



Luego el ortoedro es de la forma:

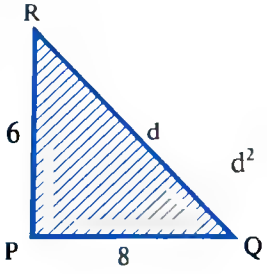


$$Sl = 4 \cdot 6 \cdot 24 = 576 \text{ dm}^2$$

$$St = Sl + 2Sb = 576 + 2 \cdot 8 \cdot 6 = 576 + 96 = 672 \text{ dm}^2$$

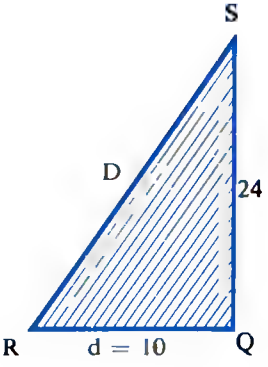
$$V = Sb \cdot H = 8 \cdot 6 \cdot 24 = 1.152 \text{ dm}^3$$

Para hallar la diagonal D del ortoedro, habrá que aplicar dos teoremas de Pitágoras a sendos triángulos rectángulos rayados en la figura.



$$d^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow d^2 = 36 + 64 \rightarrow d^2 = 100$$

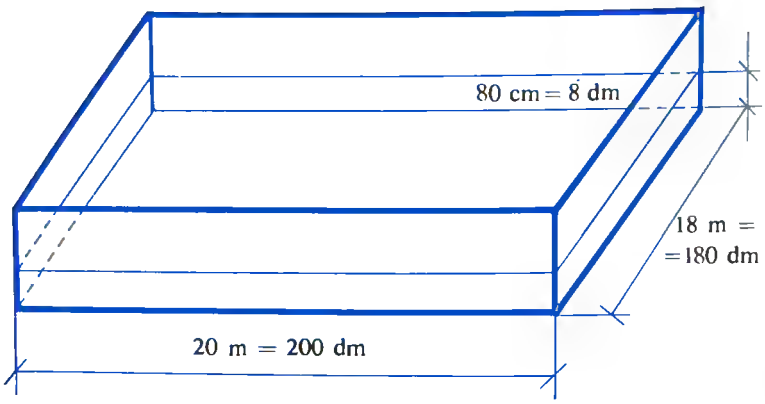
$$d = \sqrt{100} \rightarrow d = 10 \text{ dm}$$



$$D^2 = 24^2 + 10^2 \rightarrow D^2 = 576 + 100$$

$$D^2 = 676 \rightarrow D = \sqrt{676} \rightarrow D = 26 \text{ dm}$$

Ej.: Las dimensiones de un estanque rectangular son de 18 m y 20 m respectivamente. Un tubo arroja en dicho estanque agua a razón de 18 litros por segundo. Averiguar en cuánto tiempo el nivel del agua se elevará en 80 cm.



Se han cambiado las medidas a dm para equipararlas al litro ($1\ l = 1\ dm^3$).

Vamos inicialmente a calcular el volumen del agua que existe cuando se ha elevado a 80 cm el nivel.

$$V = Sb \cdot H \rightarrow V = 200 \cdot 180 \cdot 8 = 288.000\ dm^3 \text{ de agua}$$

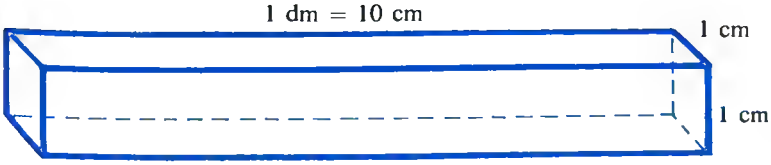
Por una simple regla de tres obtendremos el tiempo empleado en alcanzar el nivel.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ segundo} \xrightarrow{\text{aporta}} 18\ dm^3 \\ x \text{ segundos} \longrightarrow 288.000\ dm^3 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{18}{288.000}$$

$$x = \frac{288.000}{18} = 16.000 \text{ segundos} =$$

$$= 4 \text{ horas, } 26 \text{ minutos, } 40 \text{ segundos}$$

Ej.: Una barra de tiza de base cuadrada tiene una arista de 1 dm y otra de 1 cm. Sabiendo que la densidad del yeso de la tiza es de 0,65 gr/cm^3, calcular el peso de la barra de tiza.



Vamos a poner las medidas según las que se expresan en el dato de la densidad. Téngase en cuenta que la densidad de cualquier material equivale al peso del material dividido por su volumen.

Vamos primero a representar los planos.

3	3	3
3	■	3
3	3	3

9 personas por ala
8 × 3 = 24 personas

Primera trampa legal del nieto y observad que siempre habrá NUEVE personas por ala.

2	5	2
5	■	5
2	5	2

28 personas

No conforme con esto y dejándose llevar por su ambición ideó lo siguiente:

1	7	1
7	■	7
1	7	1

32 personas

Los abogados, alertados de tal contingencia, fueron a comprobarlo y vieron que nada podían hacer en su contra. Hasta que uno de estos abogados dijo: Este hombre es tan sagaz que es capaz de meter más personas todavía en el hotel cumpliendo los requisitos de nuestra cliente y que todavía le sobren habitaciones. Esta deducción le hizo pensar al flamante dueño del hotel y realizó el último y más próspero negocio.

0	9	0
9	■	9
0	9	0

36 personas

NOTA: Si os dais cuenta, la clave está en el centro.

Hay un hombre en Bruselas que ha realizado el milagro de resucitar la gaita flamenca, desaparecida totalmente de los Países Bajos desde hacía ya más de dos siglos.

Por el año de 1950, Jacques Laudy, de Bruselas, pintor y dibujante de oficio, ante la contemplación de cuadros de Breughel, tuvo la audaz y atrevida idea de ponerse a la noble e incierta tarea de fabricar él mismo una gaita flamenca, que fuera réplica exacta de las que con tanto verismo pintara en sus cuadros el famoso pintor del siglo XVI. El resultado es que hoy Jacques Laudy es el único fabricante de gaitas flamencas; toca la gaita y colecciona gaitas de otros países.

Su casa se ha convertido en un auditorium, un taller y un museo de la gaita. Ha servido ejemplar de la gaita flamenca de su manufactura a varios museos de Europa y América, entre ellos al Museo Real, Conservatorio de Música de Bruselas y al Museo Internacional de la Gaita de Brest (Bretaña). Son también notables sus escritos, ilustrados por él mismo, sobre historia de la organografía y del folklore de la gaita.

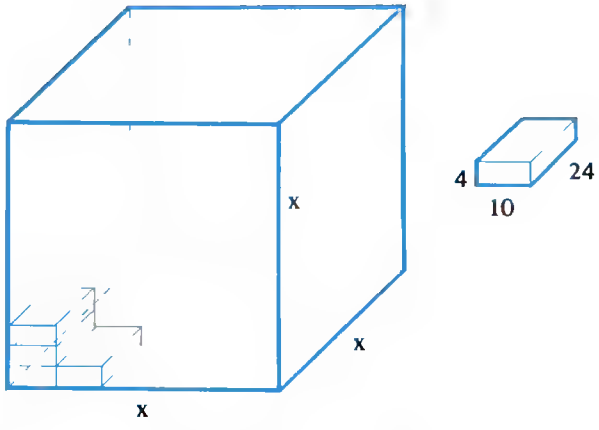
Así que necesitamos calcular inicialmente el volumen de la barra de tiza.

$$V = Sb \cdot H = 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10 \text{ cm}^3$$

$$\text{densidad} = \frac{\text{peso}}{\text{volumen}} \rightarrow 0{,}65 = \frac{\text{peso}}{10}$$

$$\text{peso} = 0{,}65 \cdot 10 = 6{,}5 \text{ gramos}$$

Ej.: Con ladrillos de 4 × 10 × 24 cm se quiere formar una pila perfectamente cúbica de tipo prismático, haciéndolo coincidir las bases de los ladrillos de cada capa con las bases de los ladrillos de la capa superior. Averiguar cuánto medirá como mínimo la arista del prisma y cuántos ladrillos tendrá la pila cúbica en total.



Llamando x a la arista del cubo, es evidente que si contamos los ladrillos de éste por cualquier cara, deberán existir un número exacto de ellos, es decir, que:

$$x = \dot{4}$$
$$x = \dot{10}$$
$$x = \dot{24}$$

y como dice que cuál debe ser la longitud mínima de la arista del cubo, es evidente que x deberá ser el menor múltiplo común de 4, 10 y 24, es decir, el m.c.m. (4, 10, 24).

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 10 = 2 \cdot 5 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array}\right\} \rightarrow x = m \cdot c \cdot m\,(4, 10, 24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \text{ cm}$$

Dividiendo ahora el m.c.m. entre cada dimensión del ladrillo obtendremos los que hay en cada dirección de la pila cúbica.

$$\left.\begin{array}{l} 120 : 4 = 30 \\ 120 : 10 = 12 \\ 120 : 24 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{n.º ladrillos/pila} = 30 \cdot 12 \cdot 5 = 1.800 \text{ ladrillos}$$

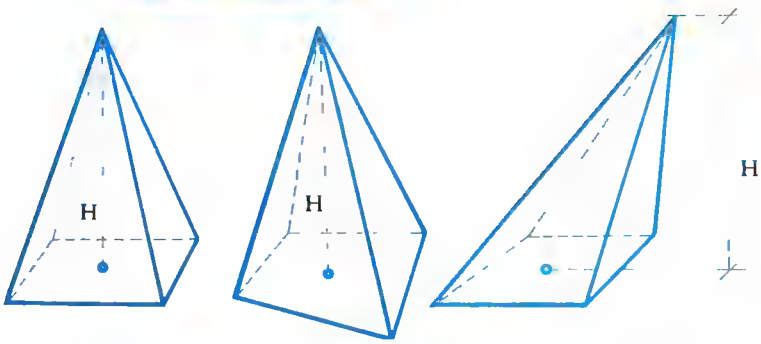
B.—Pirámide

Se llama pirámide a cualquier poliedro que tiene por base a cualquier polígono y por caras laterales a triángulos que tienen por bases los lados del polígono de la base con un vértice común no contenido en la base.

Se llaman **aristas laterales** a aquellas que concurren en el vértice y **aristas básicas** a los lados de la base.

Cuando la pirámide tiene por base un polígono regular se dice que es una **pirámide regular,** y su vértice está en la perpendicular, trazada desde dicho vértice al centro de la base, siendo precisamente esta perpendicular la **altura de la pirámide.**

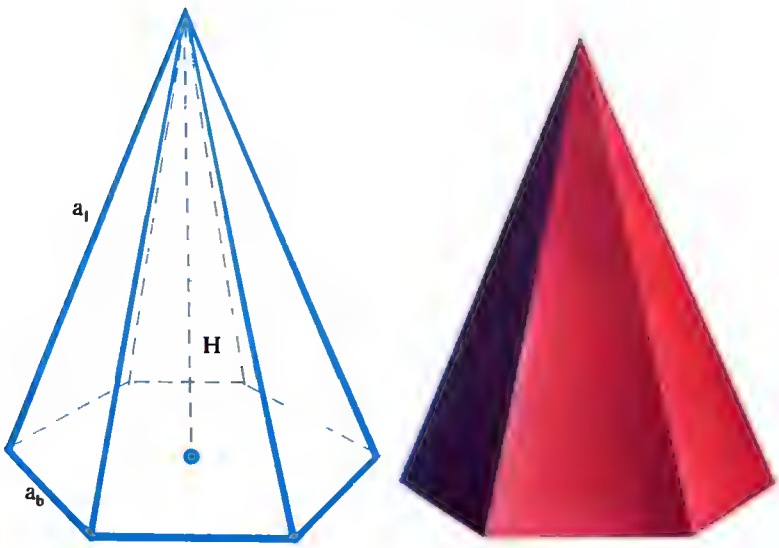
Cuando la pirámide no tiene por base un polígono regular se dice que es una **pirámide irregular** o cuando la perpendicular desde su vértice a la base no coincide con el centro de ésta, se dice que es una **pirámide oblicua.**



Pirámide regular Pirámide irregular Pirámide oblicua

Se llama **apotema de una pirámide regular** a la altura de una de sus caras laterales.

Vamos a estudiar las área laterales y totales de una pirámide:

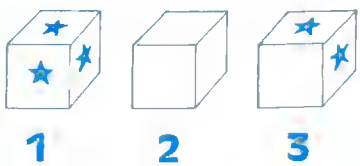


Pirámide exagonal regular

La solución es la siguiente:

Para el cubo de la parte superior en el que diagonales de sus caras delimitan triángulos blancos y negros, es correcto el marcado con el número 2; y en el de la parte inferior, que tiene estrellas en algunas de sus caras, el correcto es el número 3.

Si quieres comprobarlo dibújalos en un papel, recórtalos y los armas, te servirá para conocer perfectamente el exaedro.



Solución al problema del casino.

El amigo, sin pensar un solo instante, le dijo: ¡Muy sencillo: cada vez que ganas, tu capital se multiplica por UNO Y MEDIO y cada vez que pierdes tu capital se divide por DOS, así no me extraña tu pérdida!

Veamos: Podemos poner para ejemplo práctico el número que queramos de fichas, pero vamos a realizarlo con pocas, para que no sea tan pesado, ya que se ve lo mismo con pocas que con muchas.

			Capital	4 fichas
Apuesta	2 y	gana,	capital	6 fichas
"	3 y	pierde,	"	3 fichas
"	1,5	gana,	"	5 fichas
	2,5	pierde,	"	2,5 fichas
	1,25	pierde,	"	3,75 fichas
	1,87	pierde,	"	1,88 fichas (2 por exceso)
	1	gana,	"	3 fichas
"	1,5	pierde,	"	1,5 fichas

De esta sencilla manera se ve cómo se quedó sin dinero.

Solución al problema de los turistas.

Primero dividen la carta en tres partes de 5 platos cada una. Van a diferenciar y a saber qué contienen esos 5 platos.

Toman una carta y al plato que está el primero en la lista le ponen la letra **A**; al segundo la B; al tercero la C... y así sucesivamente hasta el sexto, que será el E.

Para la primera comida (a mediodía) piden los cuatro turistas cuatro platos: **A, B, C, C.**

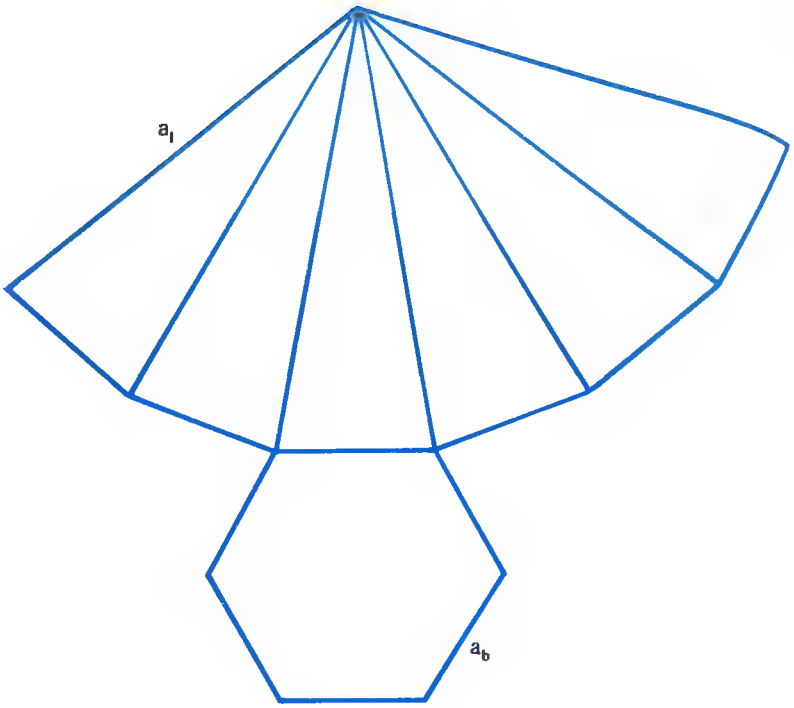
(Mediodía) 1.ª comida platos **A B C C**; al duplicarse uno de ellos ya saben cuál es el C.

(Noche) 2.ª comida, platos **A-D-E-E.**

Al observar que el plato **A** fue el mismo que le pusieron a mediodía, ya saben cuál es.

El **B**, al faltar, también saben cuál es.

El C ya lo sabían de mediodía, que se duplicó. El D para ellos es completamente nuevo y por esta razón ya saben también cuál es, porque el plato que queda (**E**) está duplicado. De esta manera en un solo día conocen 5 platos, al día siguiente hacen lo mismo con otros cinco platos y al otro día (el tercero) la misma operación de los cinco restantes.



Desarrollo de la pirámide

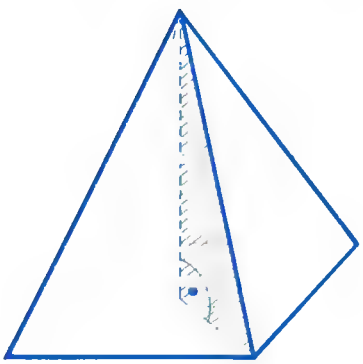
Sl = Superficie de sus caras laterales

$$St = Sl + Sb$$

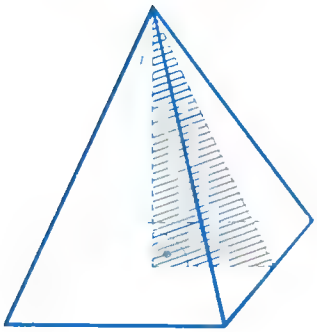
$$V = \frac{Sb \cdot H}{3}$$

NOTA.—Téngase en cuenta que en una pirámide existen dos triángulos rectángulos importantes, que nos pueden sacar de apuros.

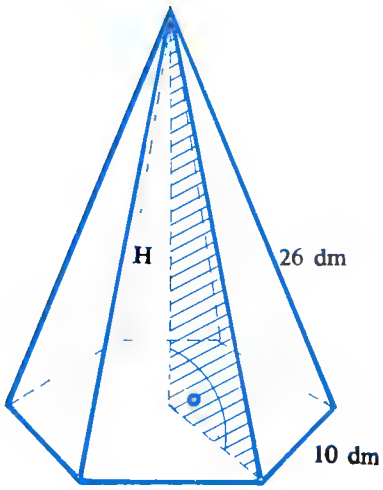
— Uno de ellos, el formado por una arista lateral, su altura y la recta que une el centro de la base con un vértice de la base (obsérvese en la figura el triángulo rectángulo rayado).



– Otro de ellos es el formado por la altura de la pirámide, la apotema de la pirámide y la apotema de la base (obsérvese en la figura el triángulo rectángulo rayado).



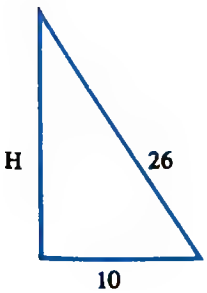
Ej.: Calcular el volumen de una pirámide hexagonal regular de arista lateral 26 dm y lado de la base 10 dm.



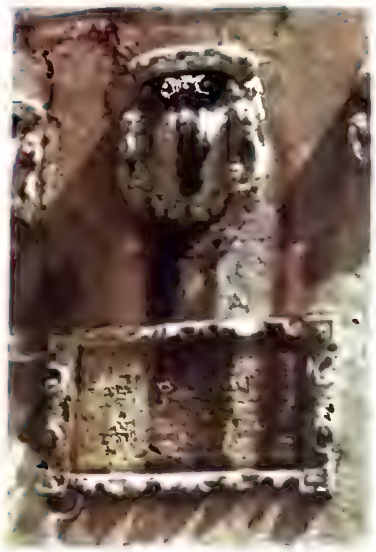
Para hallar el volumen necesitamos calcular la altura de la pirámide y el área de su base.

El cálculo de su altura lo hacemos utilizando el triángulo rayado en la figura.

$$26^2 = H^2 + 10^2 \rightarrow H^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$$



$$H = \sqrt{576} = 24 \text{ dm}$$



Los apellidos tienen su origen en la Edad Media, donde adquirió auge en Europa la costumbre de identificar a cada persona y después a toda su familia. Tienen muy diversas procedencias. Algunos son originarios de profesiones o modos de vida: así Alguacil, Herrero; otros derivados de dignidad o jerarquía, como Alcalde, Fraile, Juez; también vienen de apodos, como Gordo, Seisdedos; algunos basados en el sitio de nacimiento: Inglés, Navarro, Córdoba; o de nombres de animales: Lobo, Borrego, etc.

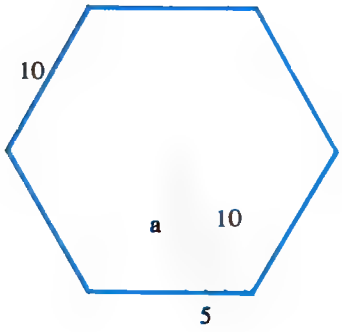
En España se usa el nombre de pila seguido del primer apellido paterno, primero materno, y así sucesivamente.

La mujer en nuestro país conserva su apellido al contraer matrimonio; no así en Francia ni en los países anglosajones donde al casarse pierde su apellido para todos los efectos y toma el de su marido.

Existen apellidos verdaderamente difíciles de pronunciar, como algunos vascos: Belausteguigoitia; y algunas combinaciones de ellos resultan curiosas o raras, así: Toro Manso, Bobo Pequeño.

Nadie puede modificar sus apellidos, aunque últimamente el Ministerio de Justicia autoriza el cambio cuando sea malsonante, insultante o despreciativo.

Calculamos ahora el área de su base que es un polígono regular ($Sb = \frac{P \cdot a}{2}$) para lo que necesitaremos su apotema que calcularemos mediante un teorema de Pitágoras en el triángulo rayado de la figura.



$$10^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow 100 = a^2 + 25 \rightarrow a^2 = 75$$

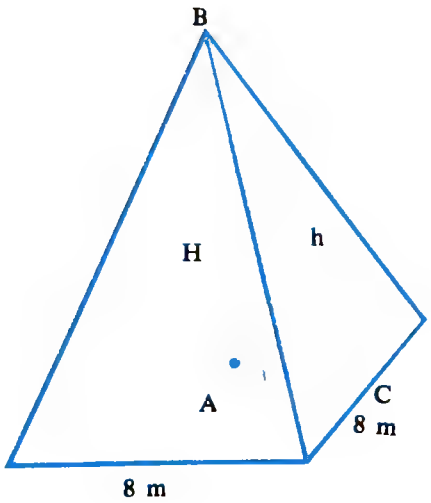
$$a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\ \text{dm}$$

$$Sb = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

luego su volumen es:

$$V = \frac{Sb \cdot H}{3} = \frac{150\sqrt{3} \cdot 24}{3} = 1.200\sqrt{3}\ \text{dm}^3$$

Ej.: Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 8 m de lado. Calcular la altura sabiendo que la razón del área lateral al área de la base es 5/2.



Como la razón del área lateral al área de la base es 5/2, vamos a calcular cuál es el área lateral y cuál es el área de la base.

PENSAMIENTOS

Muchas personas toman el buen tren, pero pocas descienden en la buena estación.
André Siegfried

Está muy bien tener suerte, pero prefiero más todavía trabajar todo lo necesario. Así, cuando llega la suerte, le encuentra a uno bien preparado.
Hemingway

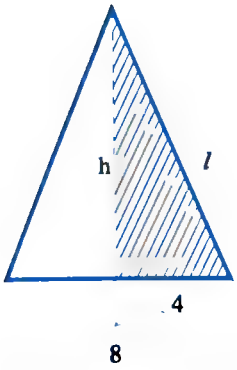
Si hace uno las cosas difíciles inmediatamente, lo único que harán las imposibles es llevarle un poco más de tiempo.
Proverbio americano

Si suprimimos lo desconocido, los riesgos y el peligro, ya no queda atractivo. Si suprimimos dicho atractivo y el placer que le acompaña, no queda más que miedo o asco.
Ribot

Un hombre es viejo desde el momento en que ha cesado de tener audacia.
Detoeuf

Lo que importa no es el bachillerato, es el hombre.
Georges Bertier

Para calcular el área lateral tendremos en cuenta las caras laterales que en un principio debemos de considerar como triángulos isósceles.



$$l^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow l^2 = h^2 + 16 \rightarrow h^2 = l^2 - 16 \rightarrow h = \sqrt{l^2 - 16}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{l^2 - 16}}{2}$$

$$Sl = 4 \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{l^2 - 16}}{2} = 16\sqrt{l^2 - 16}\ m^2$$

El área de la base es pues:

$$Sb = 8^2 = 64\ m^2$$

luego la relación expuesta por el problema es:

$$\frac{Sl}{Sb} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{16\sqrt{l^2 - 16}}{64} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{l^2 - 16}}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2\sqrt{l^2 - 16} = 20 \rightarrow \sqrt{l^2 - 16} = 10$$

$$(\sqrt{l^2 - 16})^2 = (10)^2 \rightarrow l^2 - 16 = 100 \rightarrow l^2 = 116$$

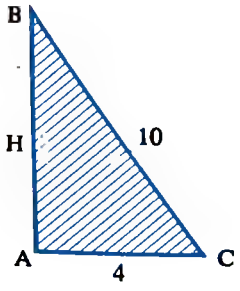
$$l = \sqrt{116} \rightarrow l = 2\sqrt{29}\ m$$

luego la altura de cara lateral o apotema de la pirámide es:

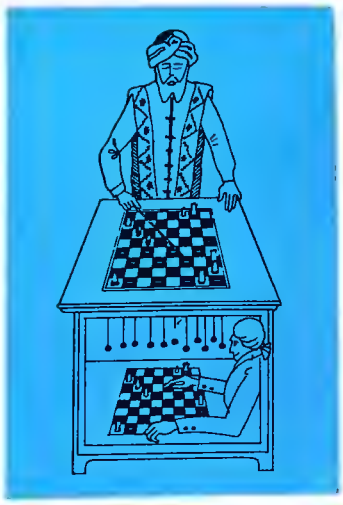
$$h = \sqrt{l^2 - 16} = \sqrt{116 - 16} = \sqrt{100} = 10\ m$$

Así que en el triángulo rectángulo rayado de la figura inicial de la pirámide $\widehat{ABC}$ mediante la aplicación de un teorema de Pitágoras, obtendremos la altura de la pirámide.

$$10^2 = H^2 + 4^2 \rightarrow 100 = H^2 + 16 \rightarrow H^2 = 100 - 16 = 84$$



$$H = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}\ m$$



Siempre fue deseo del hombre construir autómatas que le liberen de las labores pesadas e ingratas.

En este campo se han conseguido tantos adelantos hasta el punto de existir actualmente fábricas sin obreros.

Se dio en Viena, a finales del siglo XVIII, una extraordinaria patraña.

Allí, Kempelen poseía un gabinete de autómatas, en el que destacaba un muñeco metálico que sabía jugar al ajedrez, y que ganaba casi siempre. Este original aparato causó sensación. Las piezas de ajedrez se clavaban en taladros situados en el centro de cada cuadro asegurando su inventor que esta acción ponía en movimiento los mecanismos interiores que ordenaban la réplica automática. La fama del constructor, que ya había realizado maravillosos muñecos parlantes equipados con varias flautas que simulaban la voz humana, le daba el crédito suficiente para que la Corte aceptara el autómata que jugaba al ajedrez.

Pero un mal día para el Sr. Kempelen, se descubrió el truco.

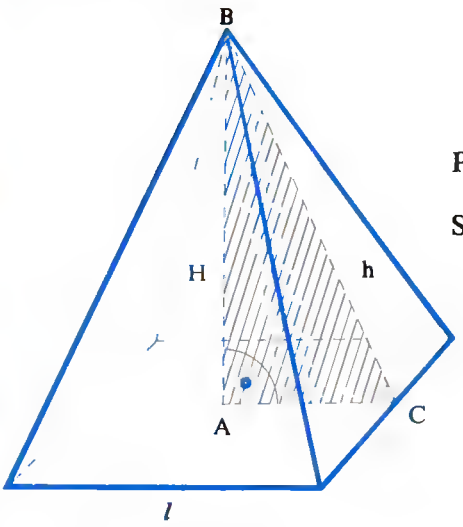
En casa de un rival suyo aficionado a las matemáticas se presentó un enano asegurando que él era el cómplice de Kempelen, que había regañado con su jefe y que su misión consistía en introducirse en la mesa hueca y desde allí efectuar la partida que ganaba casi siempre, porque él dominaba este juego desde su juventud.

Con los grandes avances de la artillería, y últimamente con la introducción de los cohetes inteligentes que buscan, localizan y destruyen el blanco con una precisión aterradora y que llevan en su interior un sofisticado conjunto de ordenadores, fruto de intrincados cálculos matemáticos, puede decirse que las antiguas fortalezas han caído en deshuso conservándose como acuartelamientos militares o bien como museos, destino que tienen ahora la mayoría de las fortalezas y fortines que los españoles diseminaron por América en la época de su Imperio.

Sólo en casos excepcionales, como en el estrecho paso de los Dardanelos, en el Canal de Panamá, o en nuestro estrecho de Gibraltar, puede todavía la artillería montada en fortalezas ejercer un efecto directo sobre los movimientos de los buques de guerra.

Muchas de estas antiguas fortificaciones dieron origen a prósperas ciudades, ya que a la sombra de sus defensas se fueron creando modestos caseríos que luego se ampliaron hasta el tamaño actual.

Ej.: El perímetro de la base de una pirámide cuadrangular es de 64 dm, y el área de su superficie total es de 8 m^2. Calcular el volumen de la pirámide.

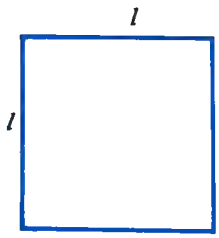


$P = 64$ dm

$St = 8\ m^2 = 800\ dm^2$

Para calcular su volumen necesitamos calcular el área de la base y la altura.

El área de la base la obtenemos previo cálculo del lado de la base con la condición del perímetro (la base es un cuadrado).



Perímetro $= 64$ dm

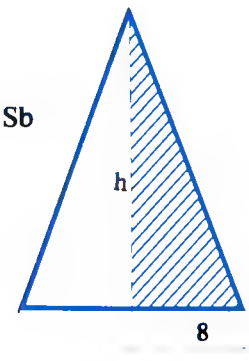
$64 = 4l \rightarrow l = \dfrac{64}{4} = 16$ dm

$Sb = l^2 = 16^2 = 256\ dm^2$

el área total de la pirámide es:

$$St = Sl + Sb$$

Calculemos la Sl:



$$x^2 = h^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = h^2 + 64 \rightarrow h = \sqrt{x^2 - 64}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16 \cdot \sqrt{x^2 - 64}}{2} = 8\sqrt{x^2 - 64}\ dm^2$$

$$Sl = 4 \cdot \frac{8\sqrt{x^2 - 64}}{2} = 16\sqrt{x^2 - 64}$$

luego:

$$St = Sl + Sb;\ 800 = 16\sqrt{x^2 - 64} + 16^2$$

$$800 = 16\sqrt{x^2 - 64} + 256 \rightarrow 800 = 16(\sqrt{x^2 - 64} + 16)$$

$$\frac{800}{16} = \sqrt{x^2 - 64} + 16 \rightarrow 50 = \sqrt{x^2 - 64} + 16$$

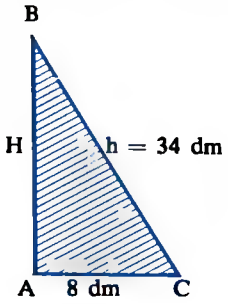
$$34 = \sqrt{x^2 - 64} \rightarrow (34)^2 = (\sqrt{x^2 - 64})^2$$

$$1156 = x^2 - 64 \rightarrow 1156 + 64 = x^2 \rightarrow x^2 = 1220$$

$$x = \sqrt{1220} = 2\sqrt{305}\ \text{dm}$$

luego $h = \sqrt{x^2 - 64} = \sqrt{1220 - 64} = \sqrt{1156} = 34$ dm

Así que en el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ de la figura inicial, obtendremos la altura de la pirámide:



$$34^2 = H^2 + 8^2 \rightarrow 1156 = H^2 + 64$$

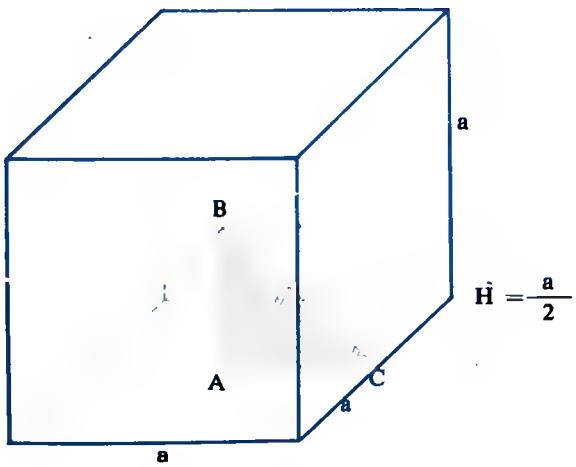
$$H^2 = 1156 - 64 = 1092$$

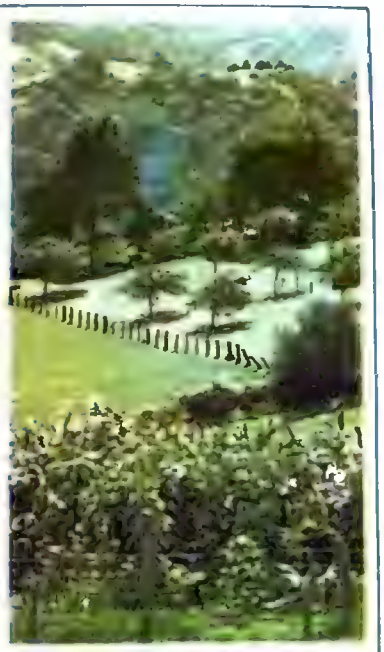
$$H = \sqrt{1092} = 2\sqrt{273}\ \text{dm}$$

Así que el volumen es:

$$V = \frac{Sb \cdot H}{3} = \frac{256 \cdot 2\sqrt{273}}{3} = \frac{512\sqrt{273}}{3}\ \text{dm}^3$$

Ej.: Una pirámide tiene por base una cara de un cubo de superficie 864 dm^2. Hallar el área lateral y el volumen de esta pirámide, sabiendo que su vértice es el centro del cubo.



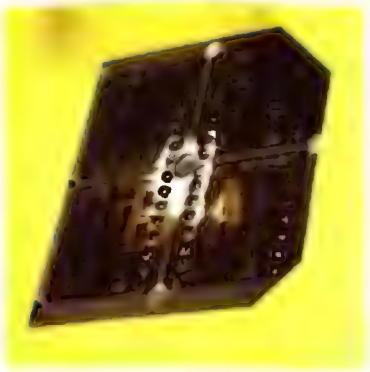


Las matemáticas también tienen aplicación, y cada día más, en la agricultura.

El hombre del campo siempre dejó el estudio de esta ciencia en manos de otras personas a las que tenía que recurrir para resolver sus problemas, admirando y pagando por servicios que él podía perfectamente resolver.

Afortunadamente esta situación está cambiando rápidamente. Del labrador desconfiado que no sabía leer ni de "cuentas", que tenía que suplicar al cura, al escribano, o al maestro, hemos pasado a esos jóvenes agricultores perfectamente preparados en todo, y especialmente en matemáticas, ciencia esta que, aparte de sus aplicaciones específicas, tiene la gran virtud de enseñar a discurrir, a proceder con cautela y sin precipitación en nuevos cultivos y en las inversiones que exige el negocio.

La ciencia matemática no necesita, como la historia, confiar en la memoria un cargamento de fechas y nombres. Aquí casi todo se obtiene discurriendo, por raciocinio y por deducción, para que el que logre penetrar en el encanto de esta ciencia pueda llenar la tranquilidad del campo con la resolución de apasionantes problemas.



Hace casi cien años Edison hizo público el principio según el cual demostró que en el vacío los cuerpos incandescentes emiten electrones libres. Investigaciones posteriores de hombres de mente privilegiada establecieron aplicaciones a este principio.

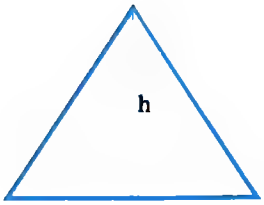
Así en el año 1904 Fleming inventa la válvula diodo; en 1906, Lee de Forest la perfecciona creando la lámpara triodo, base indiscutible de todo el desarrollo posterior de las válvulas electrónicas que hicieron posible la mayor parte de los aparatos electrónicos, radio, comunicaciones, televisión, etc. Estas válvulas, que en teoría servían para todo, tienen un gran inconveniente: el calor que producen y disipan, exigiendo unos sistemas de refrigeración algunas veces tan voluminosos como el aparato en sí. Esta característica negativa fue resuelta en 1948 por los científicos Bardeen y Brattain que en los laboratorios Bell, y tratando de cristalizar el germanio, se encontraron con nuevos materiales semiconductores capaces de modular, ampliar o conmutar una señal eléctrica equivalentes en principio a un triodo y sustituyéndolo con ventaja por sus pequeñas dimensiones, menor desgaste y gran amplificación, siendo por su solidez mecánica más fiables que las lámparas de cristal y filamento.

Al año siguiente Shockeley perfeccionó e introdujo importantes innovaciones a este dispositivo llamado transistor que hoy es imprescindible en todos los campos de la electrónica.

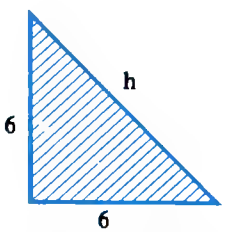
Inicialmente vamos a hallar la arista del cubo con el dato de su superficie.

$$S = 6a^2 \rightarrow 864 = 6a^2 \rightarrow \frac{864}{6} = a^2 \rightarrow a^2 = 144 \rightarrow a = \sqrt{144} = 12 \text{ dm}$$

Calculemos su área lateral considerando una de sus caras laterales:



Donde su altura h la obtendremos por el triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ rayado en la figura:



$$h^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow h^2 = 36 + 36 \rightarrow h^2 = 72$$

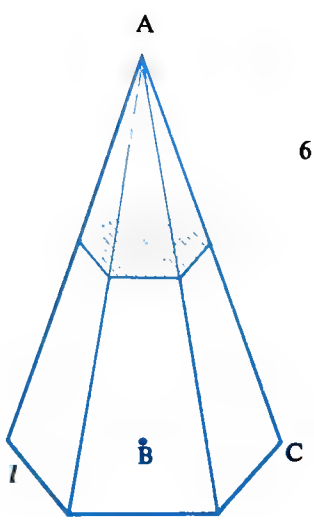
$$h = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ dm}$$

$$Sl = 4\frac{12 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 144\sqrt{2} \text{ dm}^2$$

Su volumen es pues:

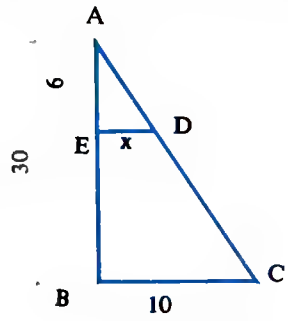
$$V = \frac{Sb \cdot H}{3} = \frac{12^2 \cdot 6}{3} = 288 \text{ dm}^3$$

Ej.: Una pirámide hexagonal regular de 3 dm de altura y en la que el perímetro de su base mide 60 cm, se corta por un plano paralelo a la base a una distancia de 6 cm del vértice. Hallar el área de la sección producida.



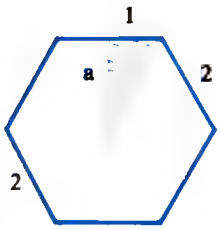
$$P = 6l \rightarrow 60 = 6l \rightarrow l = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm}$$

En el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura estableceremos una semejanza de triángulos entre los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ semejantes de donde obtendremos la distancia x, necesaria para calcular el área de la sección producida.



$$\frac{30}{10} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 10}{30} = 2 \text{ cm}$$

Así que el problema se resume a calcular el área de un hexágono (producido en la sección por el plano) de 2 cm de lado o radio.



$$2^2 = a^2 + 1^2 \rightarrow a^2 = 3 \rightarrow a = \sqrt{3} \text{ cm}$$

luego su área es: $S = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$

El arado es un instrumento agrícola muy antiguo usado ya en el neolítico europeo. De Babilonia y de Egipto se tiene noticia gráfica de su uso. En este último país se perfeccionó coincidiendo con el empleo de los animales vacunos para el tiro de los mismos.

Su misión es romper la tierra; la reja corta el terreno en sentido horizontal y la vertedera arroja la tierra a los lados ablandándola, esponjándola y permitiendo su aireación.

El arado romano, que descansa en un juego de ruedas delanteras, fue el perfeccionemiento siguiente, y aún perdura en muchísimos países.

En pequeñas explotaciones familiares se siguen utilizando hoy útiles y herramientas que son herederos de los que usaron los hombres de las cavernas cuando descubrieron la agricultura.

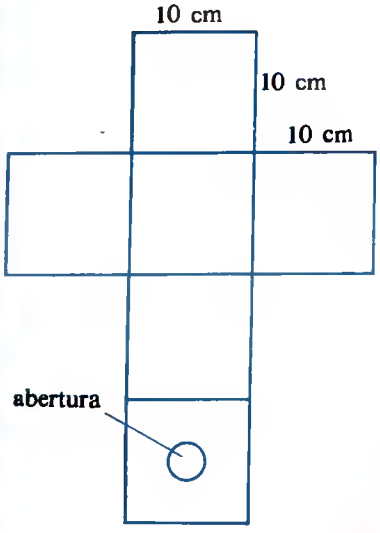
El arado evolucionó hacia el modelo de vertedera, el de disco, los arados múltiples, etc., pero su fin siempre es el mismo: abrir surcos en la tierra.

Los enormes avances de la tecnología y de los motores han permitido la construcción de grandes máquinas que hacen en un día lo que antes necesitaba varios. Se utilizan en las grandes fincas y realizan varias operaciones a la vez.

Como aplicación de los estudios, vamos a realizar este sencillo e instructivo juego.

Dibujemos el desarrollo de un cubo de 10 cm. de lado, 10 cm. de ancho y 10 cm. de altura, es decir, 10 cm. de arista.

Dibujémoslo en una cartulina fuerte, lo recortamos, doblándolo por sus correspondientes aristas y pegando las mismas con papel adhesivo.



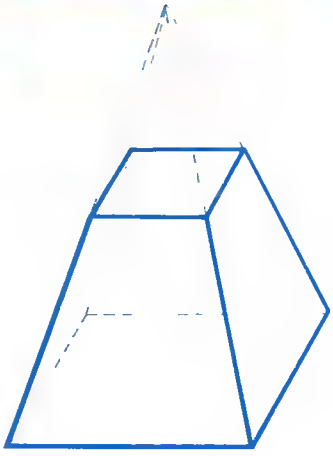
Bien, ¿ya lo tienes? Ciérralo como te indicamos y de forma que el orificio de abertura quede en la parte superior.

¿Qué tenemos? Un cubo de 10 cm. de lado y además... UN LITRO, justo de contenido. Pruébalo.

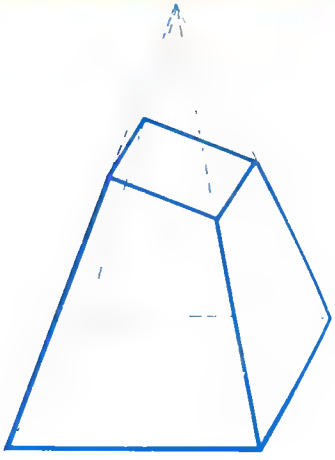
C.– Tronco de pirámide

Se llama así a la porción de pirámide que queda comprendida entre su base y la sección producida en la pirámide por un plano paralelo o no a su base.

Si el plano es paralelo a la base de la pirámide se obtiene un **tronco de pirámide de bases paralelas o regular**, y si el plano no es paralelo a la base se obtiene un **tronco de pirámide de bases no paralelas o truncado.**

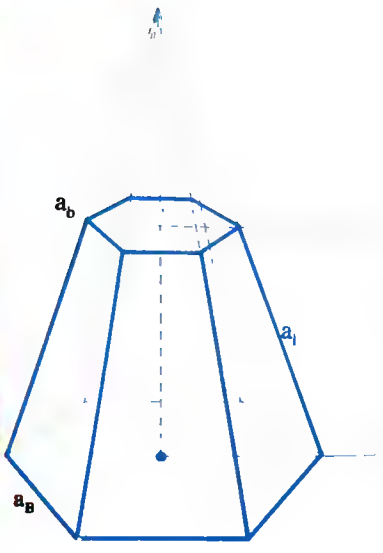


Tronco de pirámide regular

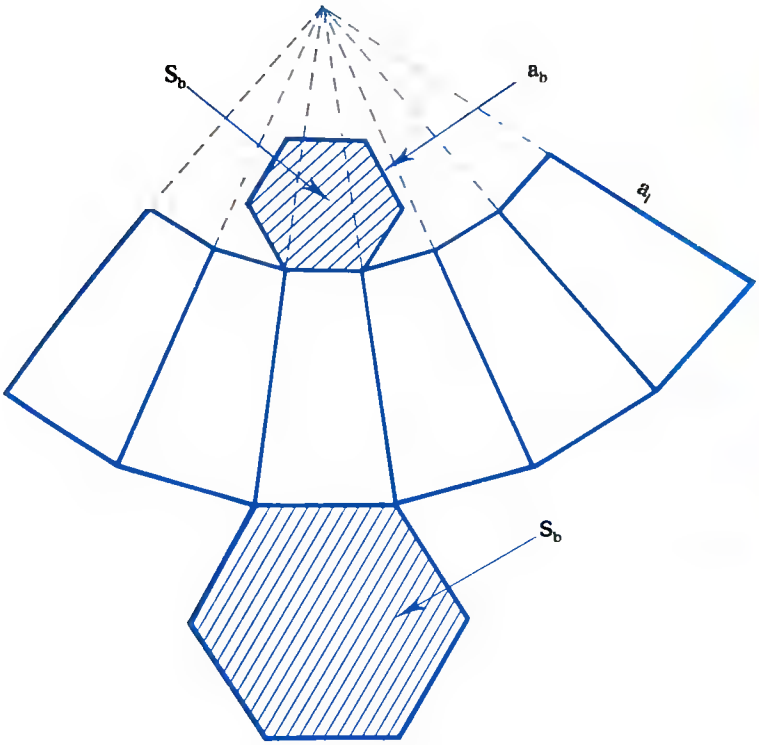


Tronco de pirámide truncado

Se llama **altura** de un tronco de pirámide regular a la distancia entre sus dos bases, y **apotema del tronco** a la porción de apotema de la pirámide total que queda al seccionarla por un plano.



Tronco de pirámide regular hexagonal

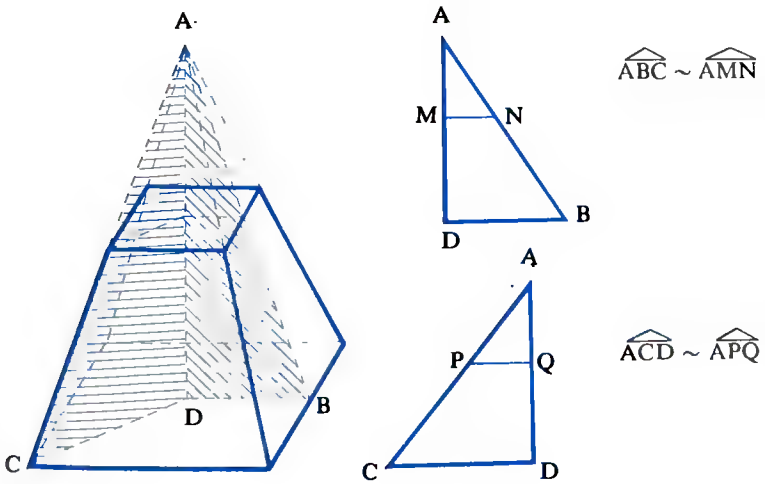


Desarrollo del tronco de pirámide

En cualquier tronco de pirámide regular, que como se ha observado procede de una pirámide, es conveniente hacer las siguientes observaciones:

— Siempre existen dos triángulos rectángulos contando con la pirámide completa que proporcionan datos importantes en el momento de resolver problemas relativos a troncos de pirámide (ver figura adjunta).

En cada uno de estos triángulos se forman a su vez dos triángulos que son semejantes y entre cuyos elementos se pueden naturalmente establecer relaciones de proporcionalidad.



1 ●——— 6 —●●●●

2 ●●——— 7 ——●●●

3 ●●●—— 8 ———●●

4 ●●●●— 9 ————●

5 ●●●●● 0 —————

Samuel Morse, pintor y matemático norteamericano, consiguió en el año 1833 diseñar un mecanismo para transmitir eléctricamente mensajes a largas distancias.

Su aparato fue el perfeccionamiento de los experimentados por los profesores Gaus y Webwe en la Universidad alemana de Gotinga. Morse logró desarrollar un modelo prácticamente sin averías y un código sencillo que pudo ser aplicado internacionalmente.

El aparato, basado en las propiedades electromangéticas de las ondas, tenía una cinta de papel que al recibir la señal del pulsador resultaba grabada por medio de un electroimán. Esta grabación, que sólo era de puntos y rayas, fue elegida por Morse después de estudios muy detenidos y cuidadosos. En la ilustración superior mostramos cómo se formaban los números.

La telegrafía con hilos fue el inicio real de los sofisticados aparatos que hoy día transmiten toda clase de mensajes.

UNIVERSO

Vamos a darnos una ligera idea de lo que es el universo.

El planeta Tierra pertenece a la Vía Láctea que tiene más de cien mil millones de estrellas y soles. Asimismo, nuestra Tierra está situada a 30.000 años luz del centro de tal Vía Láctea. Nuestra Vía Láctea es una entre millones de galaxias que pueblan el Universo.

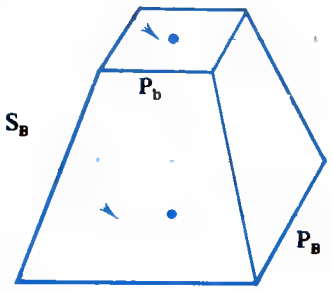
Entre las estrellas que más brillan o tienen luz propia se encuentran Arturo, Sirio, Alfa de Centauro, etc. Están situadas a unos mil años luz de nuestro planeta.

Gracias a los sofisticados y gigantescos telescopios podemos observar estrellas de hasta 10.000 millones de años luz de distancia. Muchos, creemos, de estos soles o estrellas (la luz que vemos salió de ellas hace nada más y nada menos que diez mil millones de años) se habrán apagado e incluso extinguido y sin embargo todavía seguiremos viendo su luz durante muchos años.

La foto superior tomada por el observatorio Naval de USA corresponde a la Nebulosa Orión, inmensa nube de gases luminosos difícilmente visibles por el ojo humano. Se realizó en película especial Kodak, aprovechando la luz que salió de la nebulosa hace 1.000 años.

— Las bases de un tronco de pirámide regular son polígonos semejantes. La razón de semejanza es la misma que la que existe entre la altura de la pirámide total y la altura de la pirámide que sobra.

Por lo tanto los perímetros de sus bases y las áreas de sus bases guardarán una cierta relación con esta razón de semejanza.

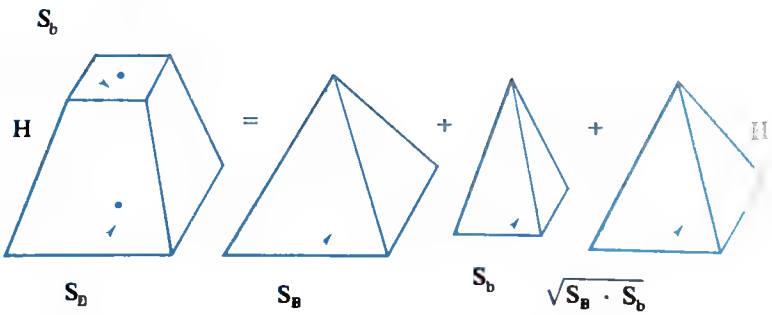


$$\frac{H}{h} = K \text{ (razón de semejanza)}$$

$$\frac{P_B}{P_b} = K$$

$$\frac{S_B}{S_b} = K^2$$

— El volumen de cualquier tronco de pirámide es equivalente a la suma de tres pirámides que tienen por altura común la del tronco de pirámide y por bases las dos del tronco y una media proporcional entre ellas.



Vamos, pues, a exponer el cálculo de las áreas laterales, totales y volumen de un tronco de pirámide.

Sl = superficie de las caras laterales

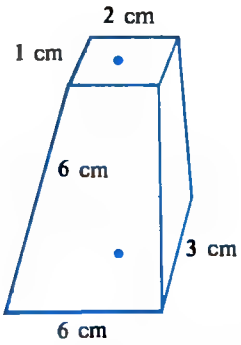
$St = Sl$ + superficie de sus bases $= Sl + S_B + S_b$

$$V = \frac{H}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b})$$

NOTA.—Independientemente de las fórmulas expuestas y con los conocimientos vertidos anteriormente es fácil obtener Sl, St o V de un tronco de pirámide.

En el caso particular del volumen V de un tronco, su obtención resulta de restar al volumen total de la pirámide total, de la que procede, el volumen de la pirámide deficiente. Todos los datos para esta operación se obtienen de las semejanzas anteriores dichas.

Ej.: Calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular de altura 6 cm y cuyas bases tienen por dimensiones 6×3 y 2×1 cm respectivamente.

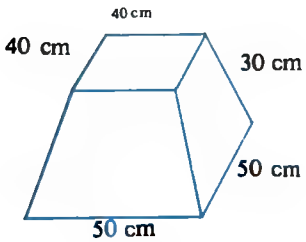


$$V = \frac{H}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}) =$$

$$= \frac{6}{3}(6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}) =$$

$$= 2\,(18 + 2 + 6) = 52\ \text{cm}^3$$

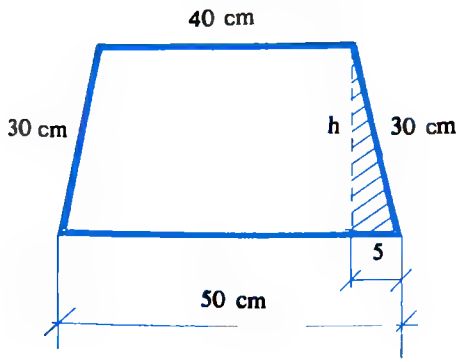
Ej.: Los lados de las bases cuadradas de un tronco de pirámide regular miden 50 cm y 40 cm respectivamente, y la arista lateral del tronco es de 30 cm. Calcular la superficie lateral, total y el volumen del tronco expresado en litros.



Para hallar su superficie lateral, hallaremos la suma de las áreas de todas sus caras laterales, que son trapecios isósceles y de los cuales desconocemos inicialmente su altura, necesaria para calcular su área.

$$30^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 900 - 25 = 875$$

$$h = \sqrt{875} = 5\sqrt{35}\ \text{cm}$$



GALAXIA

Cada galaxia contiene millones de estrellas, ocupando una región definida en el Universo. Dicho Universo está poblado de alrededor de mil millones de galaxias.

Cohetes y satélites artificiales ha enviado la Tierra a la Luna, Marte, Júpiter, etc., o sea, como visitar al vecino de al lado.

Estos planetas conteniendo helio, metano, carbono, nitrógeno, hidrógeno y oxígeno poseen una atmósfera que no es la misma que existe en la Tierra; por tanto podemos deducir que ahora no puede existir vida, ni animal, ni vegetal, pero bien podía haber habido anteriormente vida en ellos, por ser planetas viejos en período de extinción; pero también, y ¡por qué no!, podíamos decir lo contrario, que sean planetas jóvenes y que quizá en un futuro puedan albergar vida, tanto animal como vegetal. Las dos conjeturas, para nosotros, son válidas..., hasta que alguien no nos demuestre lo contrario.

REQUISITOS DE VIDA

Los principales requisitos para que en un planeta exista vida son: un sol con temperatura apropiada, como para mantener líquida la mayor parte de agua; un planeta lo suficientemente grande como para retener la atmósfera de oxígeno y lo suficientemente pequeño como para que escape el hidrógeno.

En las mismas o similares condiciones de nuestro planeta se encuentran millones y millones en el Universo. Los más prestigiosos investigadores de éste están de acuerdo de que en mundos paralelos al nuestro existe vida, aunque su configuración sea distinta a la nuestra. No tenemos más que ver entre las distintas razas que pueblan la tierra; su configuración biológica no es igual en todas.

Somos lo suficientemente humildes como para creer que este "granito de arena" del Universo sea el único que esté habitado.

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{50 + 40}{2} \cdot 5\sqrt{35} = 225\sqrt{35}\ cm^2$$

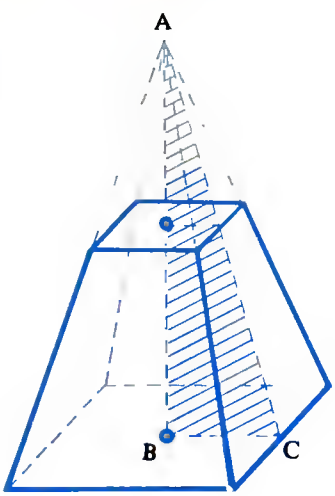
$$Sl = 4 \cdot 225\sqrt{35} = 900\sqrt{35}\ cm^2$$

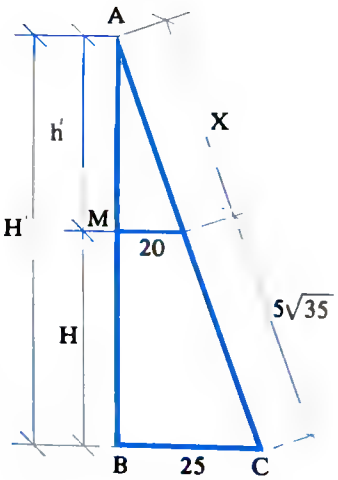
Para hallar su área total le sumaremos a su área lateral el área de sus dos bases:

$$St = Sl + S_B + S_b = 900\sqrt{35} + 50^2 + 40^2 =$$
$$= 900\sqrt{35} + 2500 + 1600 = 4100 + 900\sqrt{35}\ cm^2$$

El cálculo del volumen del tronco lo podemos conseguir de dos formas:

1.ª FORMA.–Restando al volumen de la pirámide total el volumen de la pirámide deficiente; para ello hay que calcular datos, estableciendo una semejanza de triángulos en el triángulo rayado en la figura.





$\widehat{ABC} \sim \widehat{AMN}$

$$\frac{25}{x + 5\sqrt{35}} = \frac{20}{x} \rightarrow 25x = 20x + 100\sqrt{35}$$

$$5x = 100\sqrt{35} \rightarrow x = \frac{100\sqrt{35}}{5} = 20\sqrt{35}\ cm$$

Por Pitágoras en $\widehat{ABC}$ obtendremos H':

$$(25\sqrt{35})^2 = 25 + (H')^2 \rightarrow 21875 = 625 + (H')^2 \rightarrow 21250 = (H')^2$$

$$H' = \sqrt{21250} = 25\sqrt{34}\ cm$$

Por Pitágoras en $\widehat{AMN}$ obtendremos h':

$$(20\sqrt{35})^2 = 20^2 + (h')^2 \rightarrow 14000 = 400 + (h')^2 \rightarrow 13600 = (h')^2$$

$$h' = \sqrt{13600} = 20\sqrt{34}\ cm$$

Luego teniendo H' y h' el volumen del tronco es:

$$V = \frac{S_B \cdot H'}{3} - \frac{S_b \cdot h'}{3} = \frac{50^2 \cdot 25\sqrt{34}}{3} - \frac{40^2 \cdot 20\sqrt{34}}{3} =$$

$$= \frac{62500\sqrt{34}}{3} - \frac{32000\sqrt{34}}{3} = \frac{30500}{3}\sqrt{34}\ cm^3 = \frac{30500}{3}\sqrt{34}\ l$$

2.ª FORMA.—Consiste en aplicar la fórmula que expresa el volumen del tronco, para lo que es necesario calcular la altura H del tronco.

$$H = H' - h' = 25\sqrt{34} - 20\sqrt{34} = 5\sqrt{34}\ cm$$

$$V = \frac{H}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}) = \frac{5\sqrt{34}}{3}(50^2 + 40^2 + \sqrt{50^2 \cdot 40^2})$$

$$= \frac{5\sqrt{34}}{3}(2500 + 1600 + 2000) = \frac{5\sqrt{34}}{3}6100 =$$

$$= \frac{30500}{3}\sqrt{34}\ cm^3 = \frac{30500}{3}\sqrt{34}\ l$$

Ej.: Un tronco de pirámide cuadrangular regular tiene por volumen 158 m^3 y su altura es de 6 m. Sabiendo que el lado de una de las bases es de 7 m, se desea calcular el lado de la otra base.

Aplicando la fórmula del volumen del tronco:

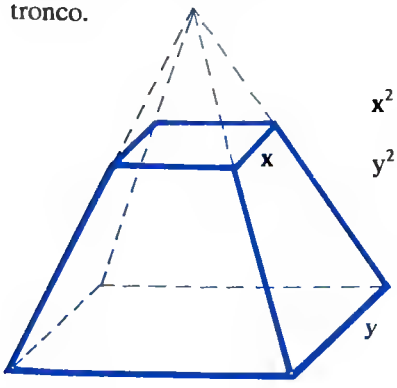
$$V = \frac{H}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}) \rightarrow 158 = \frac{6}{3}(7^2 + a^2 + \sqrt{7^2 \cdot a^2})$$

$$158 = 2(49 + a^2 + 7a) \rightarrow 79 = 49 + a^2 + 7a \rightarrow 30 = a^2 + 7a$$

$$a^2 + 7a - 30 = 0;\ a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{2} = \frac{-7 \pm 13}{2} = \begin{cases} 3 \\ \cancel{-10} \end{cases}$$

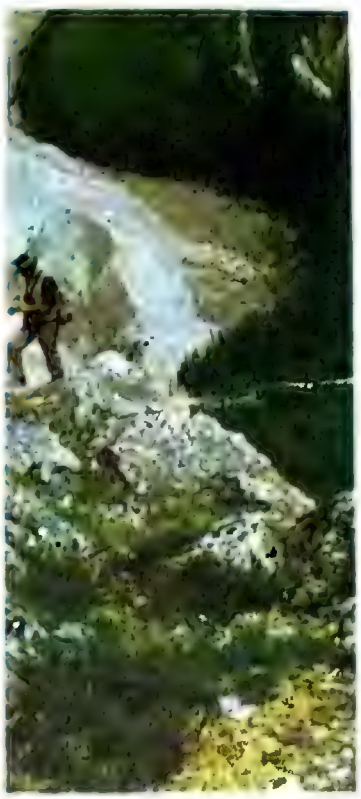
luego el lado de la otra base es 3 m.

Ej.: El área de la superficie total de un tronco de pirámide regular de bases cuadradas es 1.680 cm^2, las áreas de las bases son 144 cm^2 y 324 cm^2 respectivamente. Hallar la apotema del tronco.



$x^2 = 144 \rightarrow x = \sqrt{144} = 12$ cm

$y^2 = 324 \rightarrow y = \sqrt{324} = 18$ cm



Una persona sube una cuesta a una velocidad de 3 Km. por hora, y sin parar, al llegar a la cima, inicia la bajada a una velocidad de 6 Km. por hora. ¿Cuál es la velocidad media del total recorrido?

Este problema hay que realizarlo sin operaciones.

LA SOLUCION EN PAGINA 576.

BILLAR

Francisco y Miguel van a jugar al billar. Cuando Miguel juega con Raúl siempre le da éste a aquél una ventaja de 20 a 100 carambolas. Y cuando juegan Raúl y Francisco, éste le da otras 20 carambolas a 100.

¿Cuántas carambolas de ventaja debe dar Francisco a Miguel para equilibrar la partida?

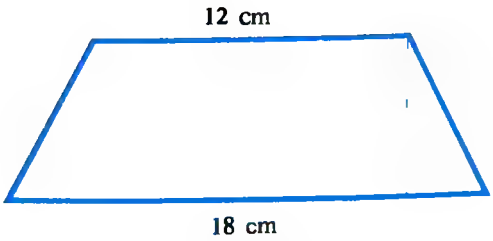
LA SOLUCION EN PAGINA 576.

El edificio que, con el nombre de "Palacio de los Oficios", levantó en Florencia Giorgio de Vasari en el siglo XVI para centralizar en él todas las actividades administrativas de los Médicis, señores desde hacía mucho tiempo de la ciudad, se conservaba perfectamente y en él se hallaba instalado una de las mejores pinacotecas del mundo, la primera entre las italianas.

El núcleo principal está formado por las obras artísticas reunidas por los Médicis durante siglos de poder. De Cosme el Viejo a Cosme III protegieron sistemáticamente a los artistas de su época, reuniendo también esculturas antiguas. Por el mecenazgo de esta familia italiana cuenta además de con esta Galería de los Uffizi, con la Galería Palatina, el museo de Bargello y el arqueológico de Florencia.

(Continúa en la página siguiente)

Para calcular la apotema del tronco h, vamos a utilizar el dato de su superficie lateral.



$$S = \frac{B + b}{2} \cdot h \rightarrow S = \frac{18 + 12}{2} \cdot h = 15\ h$$

$$Sl = 4S \rightarrow 1680 = 4 \cdot 15\ h \rightarrow 1680 = 60\ h$$

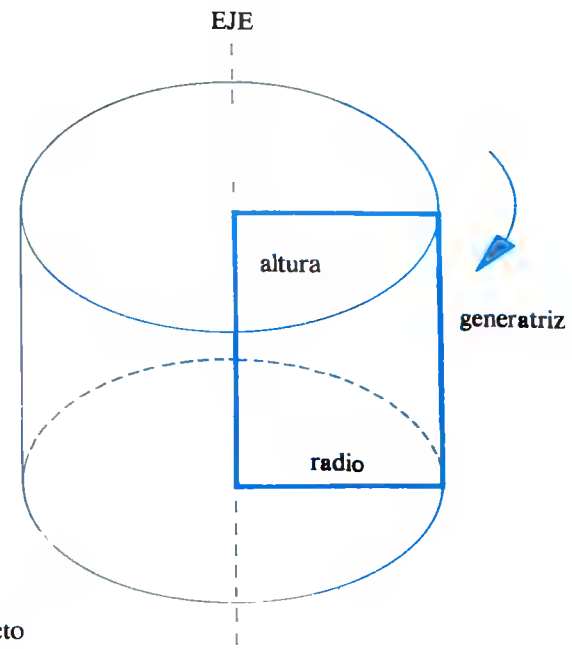
$$h = \frac{1680}{60} \rightarrow h = 28\ cm$$

D.—Cilindro

Se entiende por superficie cilíndrica de revolución a la engendrada por una recta llamada **generatriz** que se mueve paralelamente a una dirección determinada.

También se puede definir una superficie cilíndrica como la engendrada por una recta llamada generatriz que gira alrededor de otra recta fija llamada **eje** a la cual se conserva unida de forma paralela.

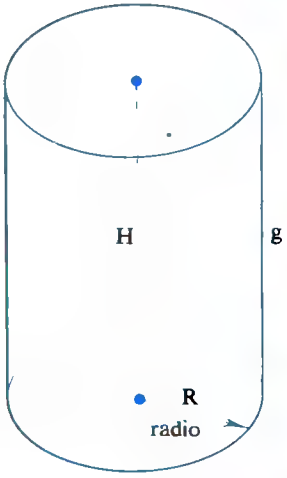
Ej.: Cualquier cuadrado o rectángulo del que mantengamos fijo un lado y hagamos girar su paralelo, engendra una superficie cilíndrica o cilindro.



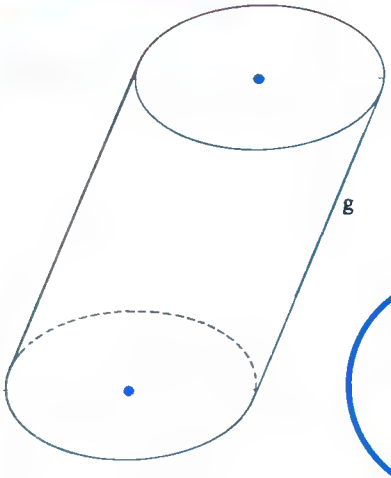
Cilindro recto

Así, pues, un cilindro consta de dos bases que son círculos, y una altura cuya longitud coincide con su generatriz (si el cilindro es recto).

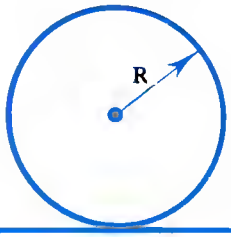
Cilindro recto

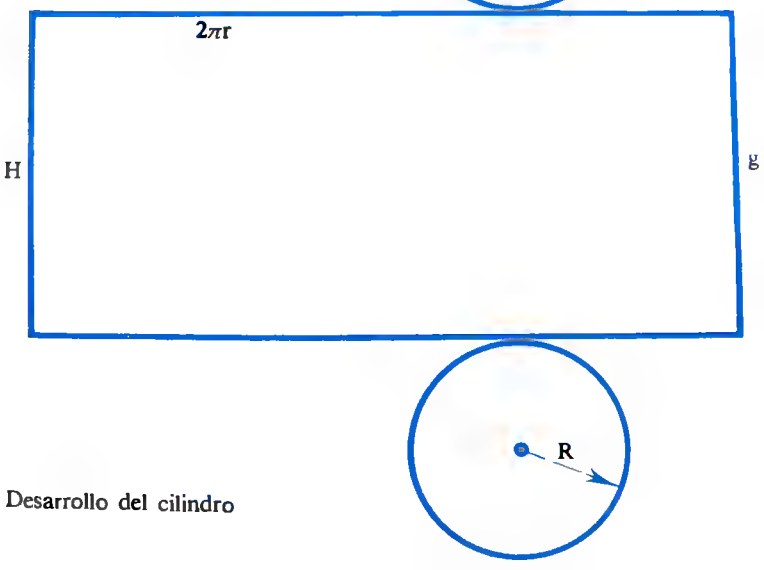


Cilindro



Cilindro oblicuo





Desarrollo del cilindro

Particulares méritos hay que reconocer a Ana M.ª Ludovica, última figura de la familia Médicis, que impuso a los Lorena —que en el año 1737 sustituían a su dinastía en el mando de la ciudad— que todas las obras de arte reunidas por sus antecesores se conservasen en Florencia para que el pueblo pudiera gozar con su contemplación.

La Galería sufrió algunos daños debidos a las expoliaciones napoleónicas.

Las obras se exponen de forma muy cuidada, asistiendo a una visión casi ininterrumpida de obras maestras.

Sólo en dibujos y grabados dispone de una colección de más de 100.000 piezas, desde esculturas romanas y griegas hasta obras de nuestro Velázquez.

En 41 salas están representadas todas las esculturas; de la pintura: Giotto, Botticelli, Leonardo Perugio, Rafael, Miguel Angel, Ticiano, Veronesse, Tintoretto, Caravaggio, Rembrandt, Rubens.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA RECOMPENSA DE LA PAGINA 534.

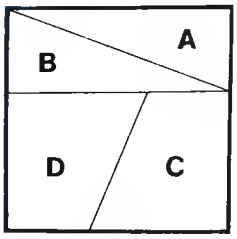
Vamos a realizar al revés, de tal manera que todo gira alrededor del múltiplo de cinco. Sólo pueden ser dos números, el cero y el cinco.

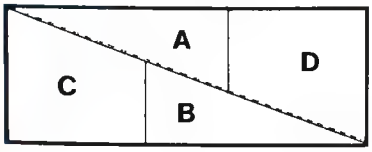
Si al cero lo multiplicamos por cinco..., es cero, éste no puede ser. Tiene que ser el cinco. Ya tenemos la cifra de las unidades. A éste lo multiplicamos por cinco (25) y ya tenemos la cifra de las decenas: el 2. A éste (25) lo multiplicamos por 5 y nos dará 125, que es el buscado.

Veamos: tapamos el 1 y tenemos 25 (quinta parte del total); tapamos el 2 y nos queda 5 (quinta parte de 25).

SOLUCION A LA PARADOJA GRAFICA DE LEWIS CARROLL DE LA PAGINA 536.

El error prácticamente imposible de descubrir a simple vista es consecuencia de que entre las dos diagonales queda un pequeño espacio con la forma de un largo rectángulo de 1 mm aproximadamente de ancho y que tiene en total una superficie de 1 cm^2, la diferencia entre las superficies de 65 y 64 cm^2.





La superficie lateral del cilindro es, como se observa en su desarrollo, el área de un rectángulo.

$$Sl = 2\pi Rg$$

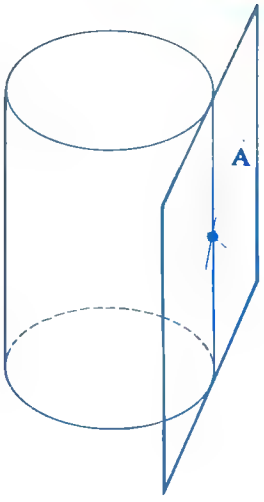
La superficie total es la superficie lateral más el área de sus dos bases:

$$St = Sl + 2S_B; \quad Sl = 2\pi Rg + 2\pi R^2$$

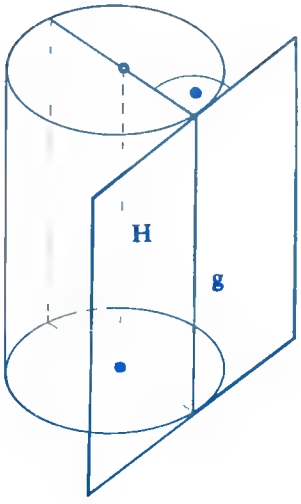
El volumen del cilindro es el área de su base por la altura.

$$V = S_B \cdot H; \quad V = \pi R^2 H$$

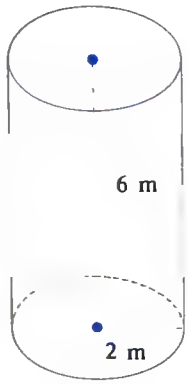
NOTA.—Todas las tangentes que se tracen a una superficie cilíndrica en un punto de ella están en un mismo plano llamado **plano tangente** al cilindro.



Cualquier plano tangente a un cilindro de revolución es perpendicular al plano determinado por el eje y la generatriz de contacto.



Ej.: Hallar la superficie lateral, total y el volumen de un cilindro de 6 m de altura y 2 m de radio de la base.



$$Sl = 2\pi Rg = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \text{ m}^2$$

$$St = Sl + 2\pi R^2 = 24\pi + 2\pi \cdot 2^2 = 24\pi + 8\pi = 32\pi \text{ m}^2$$

$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \text{ m}^3$$

Ej.: Hallar el volumen de un cilindro de revolución de 8 cm de radio, sabiendo que la razón de su área lateral al de la base es 3. Para hallar el volumen necesitamos, además del radio, la altura del cilindro, que calcularemos planteando las condiciones del problema: $\frac{Sl}{S_B} = 3$

$$\frac{Sl}{S_B} = 3 \rightarrow \frac{2\pi Rg}{\pi R^2} = 3 \rightarrow \frac{2g}{R} = 3 \rightarrow \frac{2g}{8} = 3$$

$$g = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ cm}$$

Luego el volumen es:

$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 768\pi \text{ cm}^3$$

Ej.: Hallar el volumen de un cilindro de 54π cm^2 de área total, siendo su radio básico la mitad de la altura.

Para hallar el volumen necesitamos conocer el radio básico y la altura; para ello vamos a plantear las condiciones que dicta el problema, que dan lugar a la formación de un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} St = 54\pi \text{ cm}^2 \\ R = \dfrac{H}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2\pi RH + 2\pi R^2 = 54\pi \\ \rightarrow R = \dfrac{H}{2} \end{array} \left.\right\} \rightarrow H = 2R$$

$$2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 54\pi \rightarrow 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 54\pi \rightarrow 6\pi R^2 = 54\pi$$

$$R^2 = \frac{54\pi}{6\pi} = 9 \rightarrow R = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

$$H = 2R \rightarrow H = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

Wolfgang Amadeo Mozart demostró a muy temprana edad que había nacido con un don maravilloso para comprender la música. Casi cuando pudo sostener correctamente el instrumento ya admiraba a sus familiares y amigos interpretando virtuosamente el violín.

Como compositor necesariamente hay que situarlo entre los genios de primera línea.

Ya en 1762, a los 6 años, compuso sus primeras obras, que interpretó en presencia de la Emperatriz.

Con el paso del tiempo el nombre de Mozart fue conocido y admirado en todas las cortes de Europa.

La producción del artista es extensísima.

En su obra se unen y funden armoniosamente la antigua polifonía, la música alemana, las nuevas tendencias de la ópera italiana y la música instrumental vienesa.

No obstante, sus contemporáneos no supieron apreciar su genio y murió en la miseria a los 36 años. Su pobreza hizo que se le enterrase en una fosa común. Así, sin honores mundanos, voló al cielo su alma dulce, tierna y jovial, que compuso la música más pura, más altamente espiritual que se haya oído jamás.

Hoy los amantes de la música rinden culto a su memoria y conservan amorosamente todos sus recuerdos en un museo que lleva su nombre.

La ciudad de Teotihuacán fue le primera que se construyó en el nuevo mundo. Estaba situada en las proximidades de la actual capital de México.

En veinte kilómetros cuadrados se encuentran dos pirámides, una dedicada al Sol y otra a la Luna, a cada extremo de una avenida de 45 metros de ancho y 5 kilómetros de largo que las une. A los lados de esta avenida se sitúen los edificios ceremoniales y las residencias de los nobles; fuera de esta zone estaban las viviendas de los mercaderes y los artesanos.

En la época que floreció el imperio azteca, entre los siglos III y V de nuestra era, esta ciudad conoció todo su esplendor. Tenía 150.000 habitantes y, además de centro religioso, cultural y político, fue núcleo comercial y manufecturero.

Su civilización se sustentaba en el comercio pacífico y no en el poderío de su inexistente ejército.

La ciudad no tenla murallas ni fortificaciones.

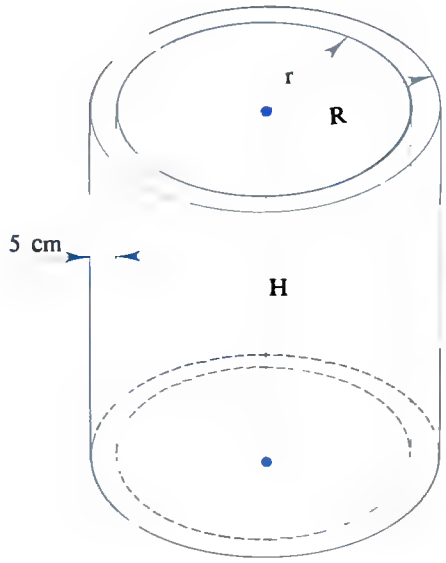
Aquí se desarrolló la astronomía, la música, la arquitectura y la matemática.

La pirámide del Sol está emplazada con tal precisión que el mediodía del dla más largo del año el Sol está situado en su exacta vertical iluminando por igual sus cuatro lados sln producir sombras.

Luego su volumen es:

$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi \text{ cm}^3$$

Ej.: Se quiere construir una columna cilíndrica hueca que tenga 5 cm de espesor. La razón entre el volumen interior y el correspondiente al volumen del cilindro exterior es de 4/9. Calcular los radios interior y exterior.



Vamos pues a imponer las condiciones citadas en el problema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_{interior}}{V_{exterior}} = \dfrac{4}{9} \\ R - r = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\pi r^2 \cdot H}{\pi R^2 \cdot H} = \dfrac{4}{9} \\ R - r = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{4}{9} \\ R - r = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \\ R - r = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{R} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} \\ R - r = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{3} \\ R - r = 5 \end{array}\right\} \rightarrow r = \frac{2R}{3}$$

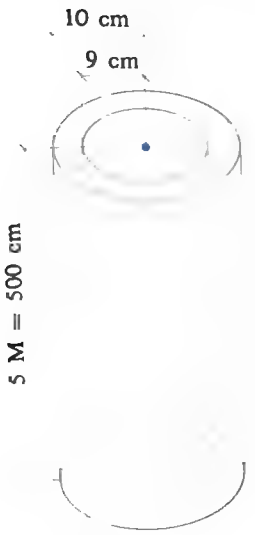
$$R - \frac{2R}{3} = 5 \rightarrow 3R - 2R = 15 \rightarrow R = 15 \text{ cm} \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

Ej.: Calcular el peso de un tubo de hierro de 5 m de largo en el que su diámetro exterior tiene 20 cm y el interior 18 cm. (Densidad del hierro = 7,3 gr/cm^3).

Para hallar el peso de un material, tendremos que acudir a la fórmula que lo expresa:

$$\text{Densidad} = \frac{\text{Peso}}{\text{Volumen}} \rightarrow \text{Peso} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen}$$

y es evidente que necesitamos calcular el volumen del material del tubo que es igual al volumen del cilindro exterior menos el volumen del cilindro interior:



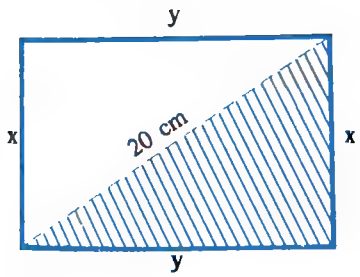
$$V_{material} = V_{exterior} - V_{interior} =$$
$$= \pi \cdot 10^2 \cdot 500 - \pi \cdot 9^2 \cdot 500 =$$
$$= 50000\pi - 40500\pi = 9500\pi =$$
$$= 9500 \cdot 3{,}14 = 29830 \text{ cm}^3$$

Luego su peso es:

$$\text{Peso} = \text{Densidad} \cdot \text{Volumen} = 7{,}3 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot 29830 \text{ cm}^3 =$$
$$= 217759 \text{ gr} = 217{,}759 \text{ Kg}$$

Ej.: A un rectángulo de 20 cm de diagonal y 56 cm de perímetro se le hace girar alrededor del lado de mayor longitud. Calcular el volumen del cuerpo así engendrado.

Es evidente que lo primero es calcular las dimensiones del rectángulo, planteando un sistema de ecuaciones con las condiciones que se exponen de él.



$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 20^2 \\ 2x + 2y &= 56 \end{aligned}\right\}$$ (Por Pitágoras en el triángulo rectángulo rayado)

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 400 \\ x + y &= 28 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 28 - y$$ (Sustituimos x en la primera ecuación)

$$(28 - y)^2 + y^2 = 400 \rightarrow 784 + y^2 - 56y + y^2 = 400$$

$$2y^2 - 56y + 384 = 0 \rightarrow y^2 - 28y + 192 = 0$$

$$y = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 768}}{2} = \frac{28 \pm 4}{2} = \begin{cases} 16 \text{ cm} \rightarrow x = 12 \text{ cm} \\ 12 \text{ cm} \rightarrow x = 16 \text{ cm} \end{cases}$$

Hace años los parques zoológicos eran cárceles para animales exóticos. Se inició su construcción para distracción y recreo de reyes.

Casi nadie sabía ni se preocupaba de aprender a cuidar los animales; por otra parte, alambres espinosos y gruesos barrotes los separaban del público.

Hoy día este triste espectáculo ha cambiado totalmente: fosos camuflados y muros cubiertos de vegetación sustituyen a las antiguas rejas. Para criar o conservar animales sanos fue necesario definir el concepto de territorio útil.

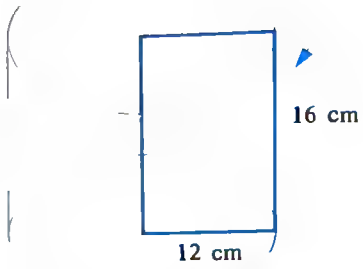
Cada familia necesita un espacio y unos elementos propios que son imprescindibles para la realización de sus funciones vitales: los hipopótamos y elefantes necesitan agua para bañarse; a los osos pardos se le ponen troncos secos de árbol para que puedan restregarse; a los animales que gustan de escarbar el suelo se les proporcionará una parte de tierra; a los leones, zonas soleadas, etc. La prueba evidente de su bienestar es la facilidad con que se reproducen en cautividad.

Hoy el parque zoológico sirve también para la investigación de la vida animal.

La humanidad parece hoy día no querer saber nada de temas como la abnegación y el sacrificio, sólo se preocupa de la búsqueda incesante de la alagría y la felicidad. Pero, pensándolo detenidamente, ¿podría la humanidad continuer una vida más o menos civilizada sin hombres y mujeres capaces de trabajar por los demás con valor, abnegación y sacrificio? Creemos que no. La fuerza inconmensurable del cristianismo se cimentó sobre miles de sacrificios de seres insignificantes; la lucha por la conquista de la libertad y de los bienes sociales se ha logrado igualmante con el sacrificio, el valor e incluso la muerte de miles de hombres. Hombres que han quedado en el anonimato pero cuyo sacrificio ha sido fecundo.

Este mismo espíritu de sacrificio es el que anima a los genios a continuar sus inveatigaciones. Por esto hemos de reconocer que sin grandes virtudes no hay individuo grande, ni puablo grande. El valor, la abnegación y al sacrificio han de ser las piedras angulares donde descanse la edificación de toda recia personalidad.

Luego las dimensiones del rectángulo son 16×12 y que tiene que girar alrededor de su mayor lado para engendrar el cilindro propuesto.



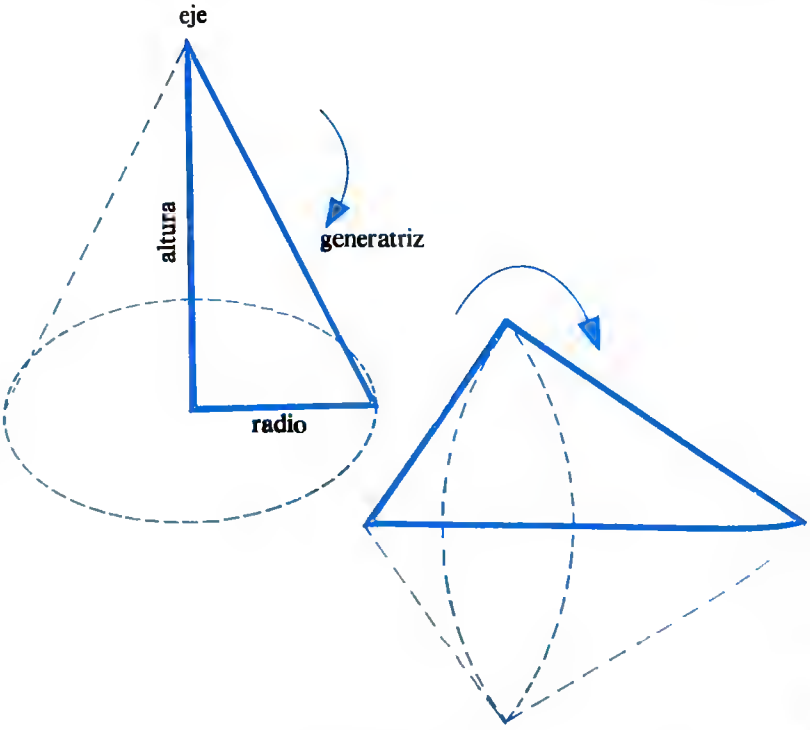
$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 12^2 \cdot 16 = 2304\pi \text{ cm}^3$$

E.—Cono

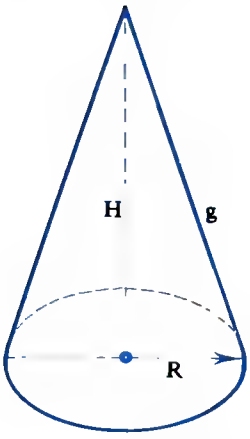
Se entiende por superficie cónica de revolución a la engendrada por una recta llamada **generatriz** que se mueve pasando por un punto fijo llamado **vértice**.

También se puede definir una superficie cónica como la engendrada por una recta que gira alrededor de otra fija llamada eje, a la que corta en un punto fijo.

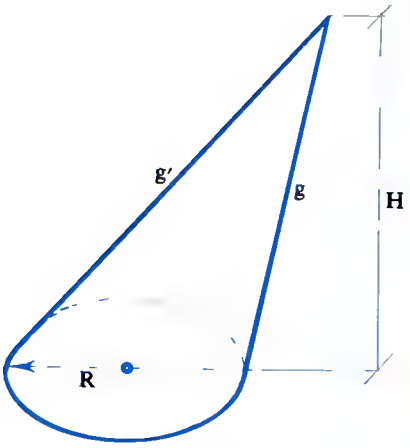
Ej.: Cualquier triángulo rectángulo que gire alrededor de cualquiera de sus lados engendra una superficie cónica. (Si gira alrededor de cualquiera de sus catetos engendra un cono y si gira alrededor de su hipotenusa engendra dos conos pegados por sus bases).



Así, pues, un cono consta de una base que es un círculo y una altura cuya longitud es distinta de la generatriz.

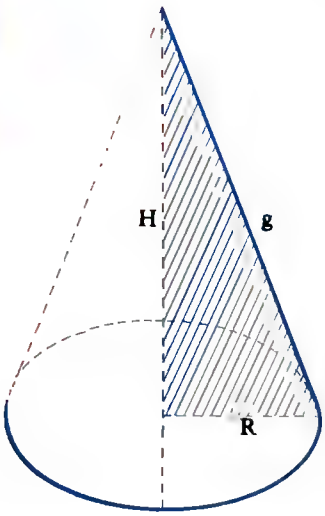


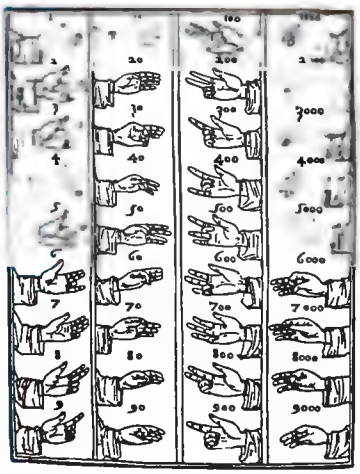
Cono recto



Cono oblicuo

Cono



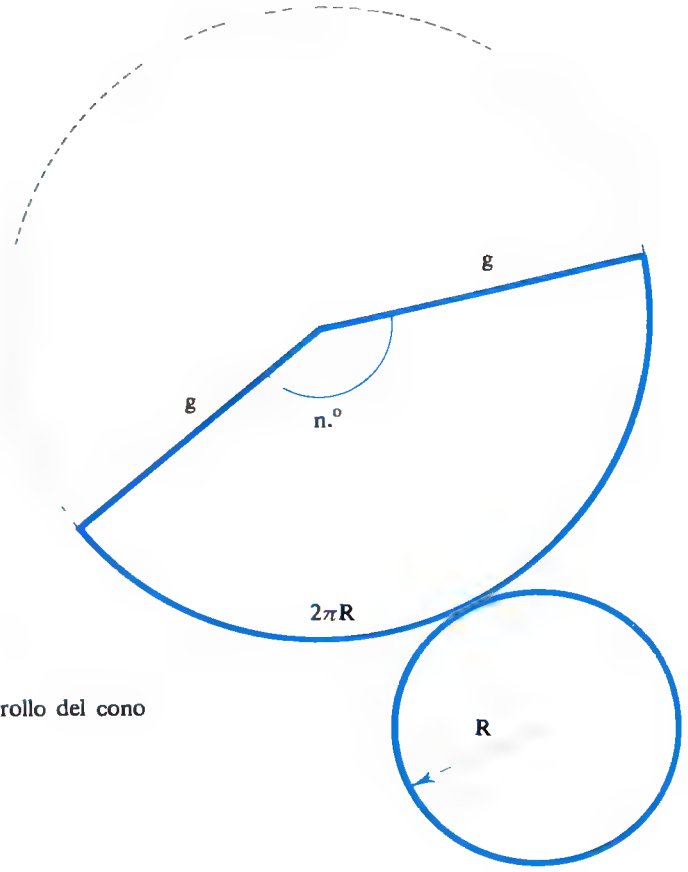


El lenguaje de los signos tiene su aplicación en el grupo de sordomudos que no pueden emitir ni recibir sonidos. Para paliar estas deficiencias se creó el lenguaje de las manos, normalizado y perfeccionado internacionalmente. Permite representar por medio de las posiciones de los dedos de las manos cada una de las letras, números y signos del alfabeto.

Cuando en cierta ciudad de la Edad Media se anunció la llegada de un potente ejército enémigo todos sus habitantes huyeron despavoridos, utilizando cada uno los medios de que disponían. Sólo quedaron en las calles un ciego y un paralítico de las dos piernas; los dos estaban imposibilitados para huir, pero al fin lograron salir de la ciudad.

¿De qué medio se valieron?

LA SOLUCION EN PAGINA 592.



Desarrollo del cono

Con ánimo de ir enfocando el cálculo de problemas cónicos, es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

– El triángulo rayado en la figura es rectángulo (posibilidad de aplicar el teorema de Pitágoras) y permite relacionar las tres magnitudes fundamentales en un cono: radio (R) altura (H) y generatriz (g), por lo que habrá que tenerle presente.

– Como se observa en la figura el desarrollo de la superficie lateral de un cono corresponde a un sector circular, cuya graduación (n°) es precisamente el **ángulo cónico**, que se obtiene como resultado de igualar la superficie lateral del cono a la superficie del sector circular correspondiente:

$$Sl = \frac{\pi g^2 n^\circ}{360}$$

Pasamos, pues, al estudio de superficies y volúmenes de un cono.

La superficie lateral de un cono es igual a la mitad del producto de la longitud de la circunferencia de la base por su generatriz (área del sector circular que corresponde al desarrollo de su superficie lateral).

$$Sl = \frac{2\pi R \cdot g}{2} \rightarrow \boxed{Sl = \pi R g}$$

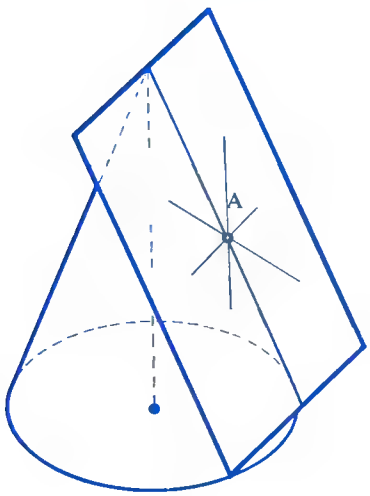
La superficie total es la superficie lateral más el área de su base.

$$St = Sl + \pi R^2 \rightarrow \boxed{St = \pi Rg + \pi R^2}$$

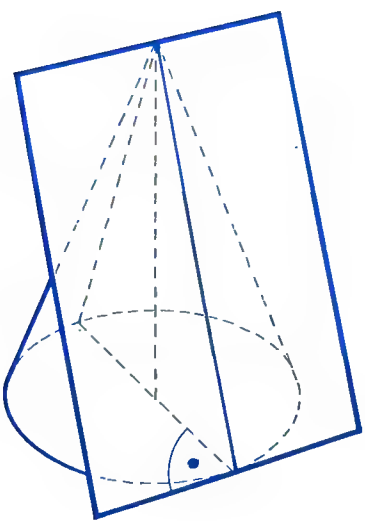
El volumen (como acaba el cono en "pico") es la superficie de su base por su altura dividido por tres.

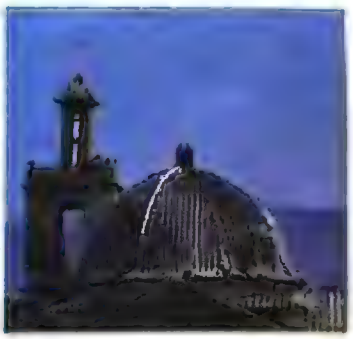
$$V = \frac{S_B \cdot H}{3} \rightarrow \boxed{V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}}$$

NOTA.—Todas las tangentes que se tracen a una superficie cónica en un punto de ella, están en un mismo plano llamado **plano tangente** al cono.



Cualquier plano tangente a un cono de revolución es perpendicular al plano determinado por el eje y la generatriz de contacto.





Si bien en el mundo cristiano de los primeros siglos sólo tenía valor la ciencia que conducía al reino de Dios y a proclamar la bondad divina, el conocimiento del saber antiguo, en especial de las matemáticas y de las ciencias naturales que el mundo occidental adquirió en su trato con los árabes favoreció el desarrollo de una cultura científica.

Los árabes que, gracias a sus conquistas iniciales, entraron en contacto con los grandes focos culturales, Mesopotamia, India, Persia, Siria, Egipto, hicieron acopio de todo su saber; en algunas zonas adoptaron la costumbre de proteger las ciencias, sin olvidar su gran afición a las discusiones y polémicas como medio de entretenimiento, con frecuencia sobre controversias religiosas, pero también con mucha asiduidad sobre temas científicos.

En este ambiente cultural y ya a mediados del siglo IX aparecen los primeros frutos de la "ciencia árabe", expresión que designa la producción científica que se desarrolla en la vasta zona ocupada por ellos.

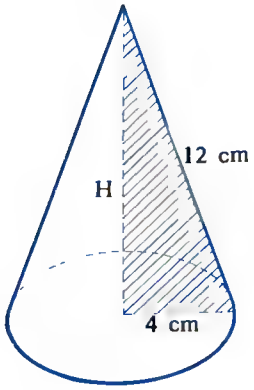
Los períodos de los siglos IX al XI en Oriente y del XI al XIII en Occidente fueron los más brillantes de esa producción y de ahí su importancia en el desarrollo del pensamiento científico universal.

En el caso de las matemáticas, la nota original que aportaron los árabes fue una nueva rama de la matemática, el álgebra, nombre que proviene de una palabra árabe que figura en el título de un escrito del siglo IX de Al-Khuwarizmi. Este escrito, de influencia hindú y griega y con posibles reminiscencias babilónicas, aporta como novedad la resolución aritmética de la ecuación de segundo grado, a la manera de hoy, con una comprobación geométrica de tipo pitagórico. A esta noveded, algebristas árabes posteriores agregaron otra: la puesta en ecuación de problemas geométricos, aun en los casos en que la ecuación algebraica resultante no podía resolverse entonces por medios aritméticos.

Estas novedades fueron conocidas en Occidente junto con el resumen del álgebra árabe que hacia el siglo XII compuso el poeta Omar Khayyam, catalogando las ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, y resolviendo aritméticamente las de primero y segundo grado, y geométricemente las de tercer grado, mediante intersección de cónicas.

En la España musulmana se ocupó de matemáticas Abrahambar Hiyya, autor de una obra "Matemática práctica" que luego se tradujo al latín.

Ej.: En un cono de revolución de 12 cm de generatriz y 4 cm de radio, hallar su superficie lateral, total, capacidad y la graduación del sector en que se transforma su superficie lateral al desarrollarla sobre un plano.



$$Sl = \pi Rg = \pi \cdot 4 \cdot 12 = 48\pi \text{ cm}^2$$

$$St = Sl + \pi R^2 = 48\pi + \pi \cdot 4^2 = 48\pi + 16\pi = 64\pi \text{ cm}^2$$

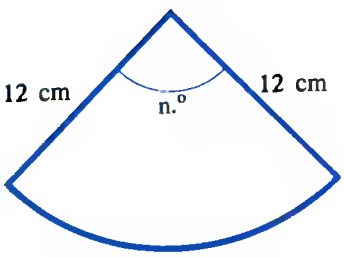
Para calcular el volumen es necesario obtener la altura H del cono mediante la aplicación de un teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo rayado en la figura:

$$12^2 = H^2 + 4^2 \rightarrow H^2 = 144 - 16 = 128 \rightarrow H = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Luego su volumen es:

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 8\sqrt{2}}{3} = \frac{128\sqrt{2\pi}}{3} \text{ cm}^3$$

Para hallar la graduación del sector circular hay que igualar la superficie lateral del cono a la superficie del sector (téngase en cuenta que el radio del sector se corresponde con la generatriz del cono).



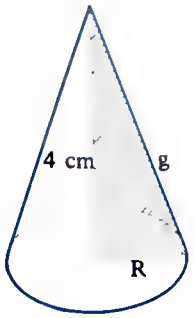
$$Sl = \frac{\pi g^2 \cdot n^\circ}{360} \rightarrow 48\pi = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot n^\circ}{360}$$

$$n^\circ = \frac{48\pi \cdot 360}{12^2 \cdot \pi} = 120^\circ$$

Ej.: De un cono de revolución se conoce su altura de 4 cm, y la suma de la generatriz y el radio de la base es 9 cm. Hallar el volumen del cono.

Para hallar el volumen necesitamos conocer el radio y la altura (es dato).

Plantearemos pues un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema para calcular el radio de éste.



$$\left.\begin{array}{l} g^2 = 4^2 + R^2 \\ g + R = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{(Aplicación de Pitágoras al triángulo rayado)} \\ \rightarrow g = 9 - R\end{array}$$

$$(9 - R)^2 = 16 + R^2 \rightarrow 81 + R^2 - 18R = 16 + R^2 \rightarrow 65 = 18R$$

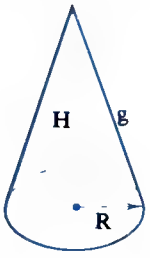
$$R = \frac{65}{18}\text{ cm} \rightarrow g = 9 - \frac{65}{18} = \frac{97}{18}\text{ cm}$$

Luego su volumen es:

$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi\left(\frac{65}{18}\right)^2 \cdot 4}{3} = \frac{16900\pi}{972} = \frac{4225\pi}{243}\text{ cm}^3$$

Ej.: La superficie lateral de un cono de revolución es 47,1 cm^2, el radio de la base es 3/4 de la altura. Calcular el radio, la altura y la generatriz del cono.

Plantearemos un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema:



$$\left.\begin{array}{l} Sl = \pi Rg \\ g^2 = H^2 + R^2 \\ R = \frac{3}{4}H \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 47{,}1 = \pi Rg \\ g^2 = H^2 + R^2 \\ R = \frac{3}{4}H \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 15 = Rg \\ g^2 = H^2 + R^2 \\ R = \frac{3}{4}H \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow g = \frac{15}{R} \\ \\ \rightarrow H = \frac{4R}{3} \end{array}$$

$$\left(\frac{15}{R}\right)^2 = \left(\frac{4R}{3}\right)^2 + R^2 \rightarrow \frac{225}{R^2} = \frac{16R^2}{9} + R^2 \rightarrow 2025 = 16R^4 + 9R^4$$

$$2025 = 25R^4 \rightarrow R^4 = \frac{2025}{25} = 81 \rightarrow R = \sqrt{81} = 3\text{ cm}$$

$$g = \frac{15}{R} = \frac{15}{3} = 5\text{ cm} \rightarrow H = \frac{4R}{3} = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4\text{ cm}$$

Quizás sea el fuego una de las cosas que hoy día no se niega a nadie.

Cuando nos piden fuego para encender un cigarrillo buscamos cerillas, mechero, y lo cubrimos con las manos si es necesario para que el aire no apague la pequeña llama.

Esta predisposición es sin duda reflejo interior de la importancia que este elemento vital tenía en la antigüedad.

El fuego caía del cielo en forma de rayo; así no se dudó en relacionarlo directamente con las divinidades.

Cuando más tarde el hombre aprendió a conservarlo y mantener su llama, lo introdujo en los templos donde los sacerdotes lo cuidaban, e incluso existían sacerdotisas que dedicaban su juventud a evitar su extinción. Cuando una tribu o un templo perdía este reflejo de la divinidad y sufría la desgracia de perder su fuego sagrado, apagado por un descuido, consideraba que había entrado en desgracia con sus dioses.

El hombre se sentía asustado ante el poder del fuego.

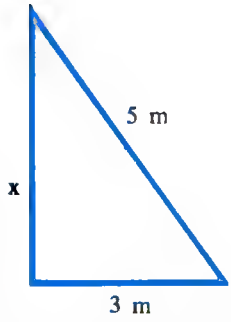
Herón de Alejandría hizo experimentos con él y consiguió máquinas y aparatos mágicos para el servicio del templo.

Un turista compró un traje de torero, un capote y una montera, y pagó por todo 140.000 ptas. El traje de torero le costó 90.000 ptas. más que el capote; el capote y el traje juntos le costaron 120.000 ptas. más que la montera. ¿Cuánto vale cada artículo?

LA SOLUCION EN PAGINA 592.

Ej.: La hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo miden 5 m y 3 m respectivamente. Calcular el área lateral y el volumen del cono engendrado por este triángulo al girar alrededor del otro cateto.

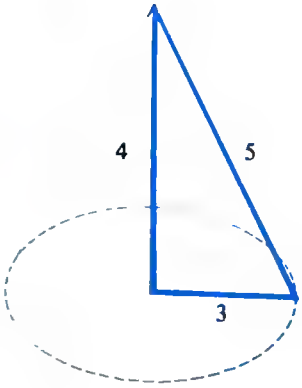
Inicialmente vamos a calcular por Pitágoras la longitud del cateto que falta en el triángulo rectángulo.



$$5^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow 25 = x^2 + 9$$

$$x^2 = 16 \rightarrow x = \sqrt{16} = 4 \text{ m}$$

Así que el volumen del cono engendrado es:



$$V = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi \text{ m}^3$$

Ej.: El área lateral de un cono recto es doble de la del círculo de la base. Calcular el ángulo en el vértice.

El ángulo en el vértice, ya se ha dicho, que se calcula igualando su superficie lateral al área del sector que resulta de desarrollar ésta.

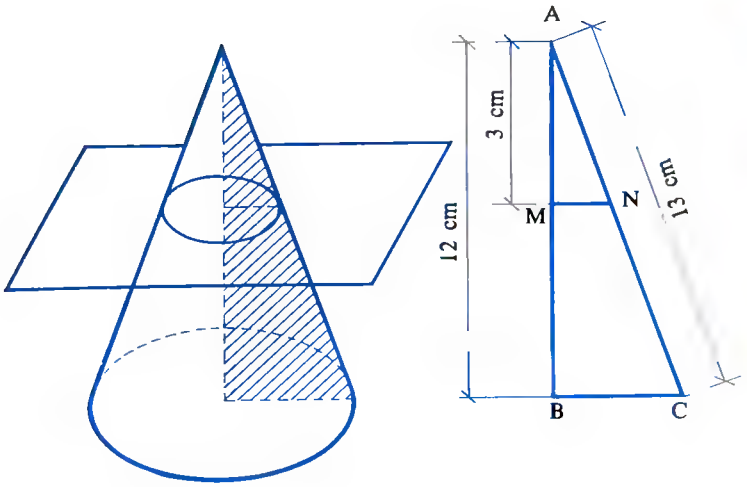
Utilizando las condiciones del problema:

$$\left.\begin{array}{l} Sl = 2\pi R^2 \\ Sl = \dfrac{\pi g^2 \cdot n^o}{360} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi Rg = 2\pi R^2 \\ \pi Rg = \dfrac{\pi g^2 n^o}{360} \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \rightarrow g = 2R & (1) \\ \rightarrow R = \dfrac{gn^o}{360} & (2) \end{array}$$

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene:

$$R = \frac{2Rn^o}{360} \rightarrow 1 = \frac{2n^o}{360} \rightarrow n^o = \frac{360}{2} = 180^o$$

Ej.: Un cono de revolución tiene de altura 12 cm y de generatriz 13 cm. Calcular el área de la sección producida por un plano paralelo a la base y que dista del vértice 3 cm.



$\widehat{ABC} \sim \widehat{AMN}$

En el triángulo rayado en la figura ocurre que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMN}$ son semejantes. Estableceremos pues una semejanza de triángulos para calcular la distancia $\overline{MN}$ necesaria para obtener el área de la Sección producida, previo cálculo por Pitágoras de la distancia $\overline{BC}$ en el triángulo $\widehat{ABC}$:

$$13^2 = 12^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow 169 = 144 + \overline{BC}^2 \rightarrow \overline{BC}^2 = 25$$

$$\overline{BC} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Así que la semejanza puede ser:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \rightarrow \frac{5}{\overline{MN}} = \frac{12}{3} \rightarrow \overline{MN} = \frac{3 \cdot 5}{12} = \frac{15}{12} \text{ cm}$$

Luego el área de la sección producida es:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{15}{12}\right)^2 = \frac{225\pi}{144} \text{ cm}^2$$

PENSAMIENTOS

Elegir oficio es la cosa más importante de toda la vida.

Pascal

La grandeza de un oficio ha podido consistir ante todo en unir a los hombres. No existe más que un lujo verdadero: el de las relaciones humanas. Trabajando únicamente por los bienes materiales, construimos nosotros mismos nuestra cárcel.

Saint-Exupéry

No hey trabajo, por pequeño que sea, cuyo rendimiento no pueda ser aumentado por el método científico.

Michelin

Escoger un oficio exige hoy día tantos esfuerzos como aprenderlo y por ello los jóvenes deberían estudiar su futura carrera con la misma dedicación que preparan sus exámenes.

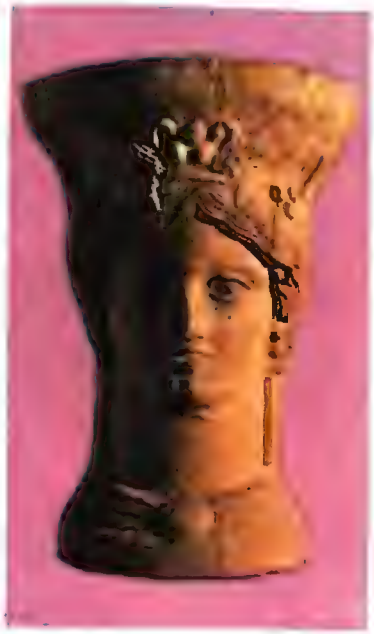
Bernard Gérand

La mayor inmoralidad consiste en ejercer un oficio que no se conoce.

Napoleón

Quien elige un oficio, elige su vida.

Pascal



La arqueología tiene muchas similitudes con la matemática pura. Ambas ciencias se basan en la investigación y el razonamiento ordenado. Si bien, los arqueólogos tienen como principal fuente de conocimiento la excavación sistemática de los lugares adecuados, en los que el paso de los siglos y los aluviones han ido enterrando los restos del pasado. Estos, una vez descubiertos y recopilados, necesitan múltiples estudios de gabinete para determinar su antigüedad.

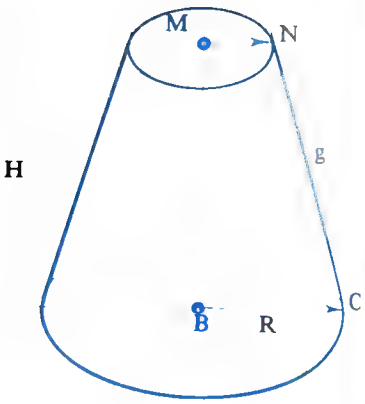
Los restos de la actividad manual del hombre, utensilios, armas, vasos, monedas, objetos de uso normal, son como una moderna fotografía que nos permitiera ver con todo detalle sus costumbres y modos de vida.

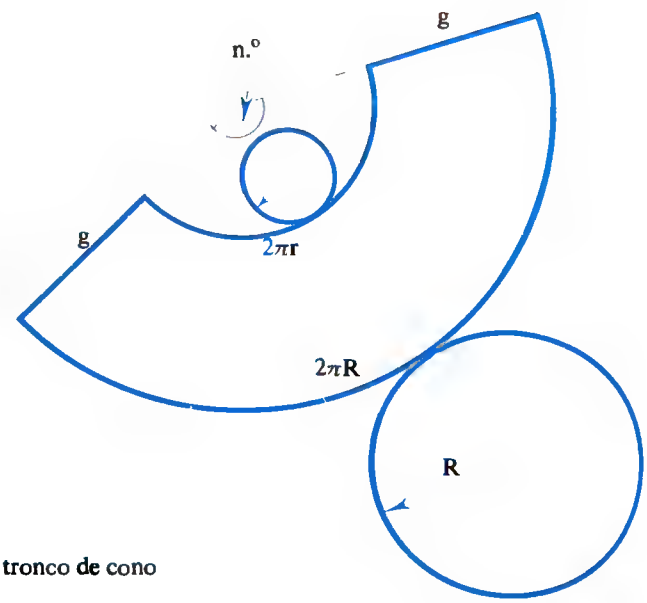
Continúa en la página siguiente

F.—Tronco de cono

Si a una superficie cónica la cortamos por un plano paralelo a su base, la porción de cono, comprendida entre su base y la sección producida, recibe el nombre de **tronco de cono**.

Tronco de cono

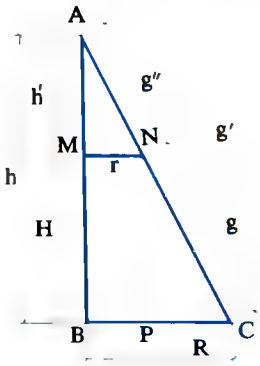




Desarrollo del tronco de cono

En cualquier tronco de cono podemos hacer las siguientes consideraciones:

– Como se observa, un tronco de cono procede siempre de un cono entero, por lo que los datos necesarios es posible calcularlos a través de una semejanza de triángulos, como la que se observa en la figura, en donde los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMN}$ son semejantes.



$$\widehat{ABC} \sim \widehat{AMN}$$

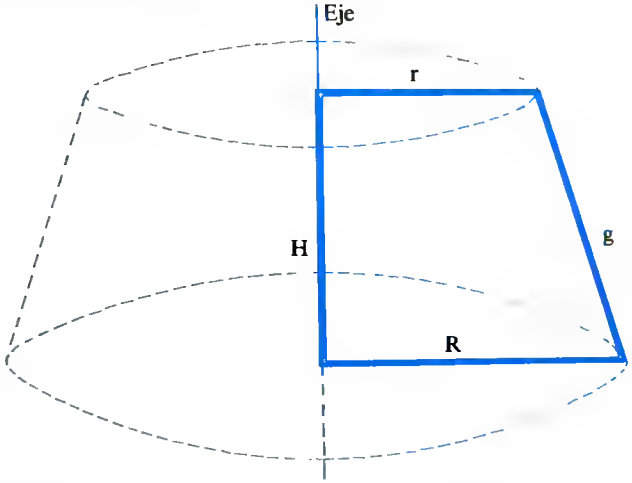
Así también la razón entre las áreas de las bases del tronco equivale al cuadrado de la razón de semejanza de los dos triángulos.

– Obsérvese también que el desarrollo de la superficie lateral del tronco de cono es un trapecio circular.

El ángulo cónico (n^o) correspondiente al tronco de cono se puede calcular como en el cono, igualando la superficie lateral del tronco de cono al área del trapecio circular correspondiente.

$$Sl = \frac{\pi R^2 n^o}{360} - \frac{\pi r^2 n^o}{360} \rightarrow Sl = \frac{\pi n^o}{360}(R^2 - r^2)$$

– En general se puede decir que un tronco de cono de revolución se engendra al girar un trapecio rectángulo alrededor del lado perpendicular a las bases.



Vamos pues a exponer las fórmulas de cálculo.

Esta ciencia tuvo su origen en Italia.

Los Médicis establecieron en Florencia la primera escuela organizada de arqueología.

Durante los siglos XVII y XVIII, muchos hombres ilustres se dedicaron a viajar e iniciaron investigaciones sobre monumentos y poblados antiguos.

Felipe V creó en España la Academia de la Historia, germen de las posteriores investigaciones en los extensos yacimientos descubiertos en nuestra patria.

Se puede decir que no existe región española donde no se encuentren restos más o menos importantes de nuestros antepasados.

Ciudades como Ampurias, en el golfo de Rosas, hoy totalmente excavada, nos descubren una primera ciudad indígena, una segunda griega y otra romana, superpuesta a las anteriores, encontrándose restos muy importantes de las tres culturas.

Todos estos restos están catalogados, clasificados y expuestos al público en un excelente museo junto a las propias excavaciones.

Un descubrimiento que con el tiempo ha adquirido enorme importancia fue el de la pila de Volta. Este sabio consiguió que la electricidad estática, que había servido de divertimento a los físicos, se convirtiera en electricidad dinámica, que proporcionaron primero las pilas y más tarde las dinamos.

El conocimiento de la pila de Volta tuvo consecuencias inmediatas.

Se estudiaron los efectos de las corrientes que culminan con las leyes de la electrólisis enunciadas por Faraday en 1833, se desarrolla la ley de Voule en 1841, aparece la ley de Ohm en 1827 con la introducción de los conceptos de intensidad de corriente y de resistencia eléctrica, se construyen baterías y los primeros instrumentos de medida como el galvanómetro.

En 1820 Oersted inicia experiencias con imanes, que sentarán las bases del electromagnetismo. Estas experiencias, continuadas por otros sabios, culminan en 1831 en el descubrimiento de la inducción electromagnética por Faraday, el más grande experimentador del siglo XIX, a quien se deben numerosos descubrimientos aparte del electromagnetismo, germen del futuro motor eléctrico, en los campos de la química y de la óptica.

La superficie lateral del tronco de cono se obtiene restando a la superficie total del cono total del que procede el tronco, la superficie lateral del cono deficiente.

$$Sl = \pi R g' - \pi r g''$$

Y por semejanza de triángulos:

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{NPC} \rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{NC}} \rightarrow \frac{R}{g'} = \frac{R-r}{g} \rightarrow g' = \frac{Rg}{R-r}$$

$$\widehat{AMN} \sim \widehat{NPC} \rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \rightarrow \frac{r}{R-r} = \frac{g''}{g} \rightarrow g'' = \frac{rg}{R-r}$$

Volviendo a la expresión de la superficie lateral y sustituyendo g' y g'':

$$Sl = \pi R g' - \pi r g'' = \pi R \frac{Rg}{R-r} - \pi r \frac{rg}{R-r} = \frac{\pi R^2 g - \pi r^2 g}{R-r} =$$

$$= \frac{\pi g (R^2 - r^2)}{R-r} = \frac{\pi g (R+r)(R-r)}{R-r} = \pi g (R+r) \rightarrow$$

$$\boxed{Sl = \pi g (R + r)}$$

La superficie total es pues la superficie lateral más el área de las dos bases.

$$St = Sl + S_B + S_b = \pi g (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 =$$
$$= \pi g R + \pi g r + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$\boxed{St = \pi R (g + R) + \pi r (g + r)}$$

El volumen del tronco de cono es, pues, el volumen del cono total del que procede el tronco, menos el volumen del cono deficiente.

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3}$$

Y por semejanza de triángulos:

$$\widehat{AMN} \sim \widehat{NPC} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PC}} \rightarrow \frac{h'}{H} = \frac{r}{R-r} \rightarrow h' = \frac{Hr}{R-r}$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{NPC} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{PC}} \rightarrow \frac{h}{R} = \frac{H}{R-r} \rightarrow h = \frac{HR}{R-r}$$

Volviendo a la expresión del volumen y sustituyendo h y h':

$$V = \frac{\pi R^2 h'}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3} = \frac{\pi R^2 \dfrac{HR}{R-r}}{3} - \frac{\pi r^2 \dfrac{Hr}{R-r}}{3} = \frac{\pi R^3 H}{3(R-r)} -$$

$$- \frac{\pi r^3 H}{3(R-r)} = \frac{\pi R^3 H - \pi r^3 H}{3(R-r)} = \frac{\pi H (R^3 - r^3)}{3(R-r)} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

$$\boxed{V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)}$$

NOTA.–La expresión $R^2 + Rr + r^2$ se obtiene al dividir por Ruffini $R^3 - r^3$ entre el binomio $R - r$ (manteniendo como variable a R).

	1	0	0	$-r^3$
r		r	r^2	r^3
	1	r	r^2	0

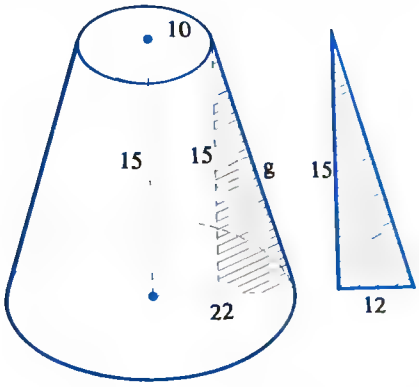
Cociente $R^2 + rR + r^2$

Ej.: Calcular el área lateral, total y volumen del tronco de cono de revolución cuya altura es de 15 cm y los perímetros de las bases son de 138,16 cm y 62,8 cm respectivamente ($\pi = 3{,}14$).

Lo primero es localizar los radios de las bases del tronco de cono, cuestión fácil con el dato de sus longitudes.

$$L = 2\pi R \begin{cases} 138{,}16 = 2\pi R \rightarrow R = \dfrac{138{,}16}{2\pi} = 22 \text{ cm} \\ 62{,}8 = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{62{,}8}{2\pi} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

Antes de aplicar las fórmulas es necesario calcular la generatriz del tronco mediante el triángulo rayado en la figura, por Pitágoras.



$$g^2 = 15^2 + 12^2 \rightarrow g^2 = 225 + 144 = 369$$

$$g = \sqrt{369} = 3\sqrt{41} \text{ cm}$$

Las abundantes experiencias de Faraday ofrecen uno de los ejemplos más claros de la marcha de un proceso científico.

A una primera etapa de índole experimental y de descubrimiento de fenómenos ocultos, siguió una segunda más teórica y de explicación científica de aquéllos mediante una clara teoría matemática.

Esta segunda, a cargo de Maxwell, que enuncia las ecuaciones que llevan su nombre, fueron publicadas en su célebre "Tratado", donde expone la teoría electromagnética de la luz, y ya en él se prevén como parte de esta teoría matemática nuevos fenómenos.

Todos estos estudios llevaron a la tercera etapa de este proceso científico, etapa en la que las previsiones de la teoría se cumplen mediante el descubrimiento y la demostración por Hertz en 1888 de que las oscilaciones eléctricas se propagan formando ondas electromagnéticas que llamó "ondas hertzianas". Realizó notables investigaciones sobre radioelectricidad y relacionó los fenómenos electromagnéticos con los ópticos.

Estas teorías abrieron el camino al inmenso campo de la radio y la televisión.

Aplicando las fórmulas de cálculo, se obtiene:

$$Sl = \pi g\,(R + r) = \pi \cdot 3\sqrt{41}\,(22 + 10) = 96\pi\sqrt{41}\ cm^2$$

$$St = Sl + \pi R^2 + \pi r^2 = 96\pi\sqrt{41} + \pi \cdot 22^2 + \pi \cdot 10^2$$

$$= 96\pi\sqrt{41} + 484\pi + 100\pi = \pi\,(96\sqrt{41} + 584)\ cm^2$$

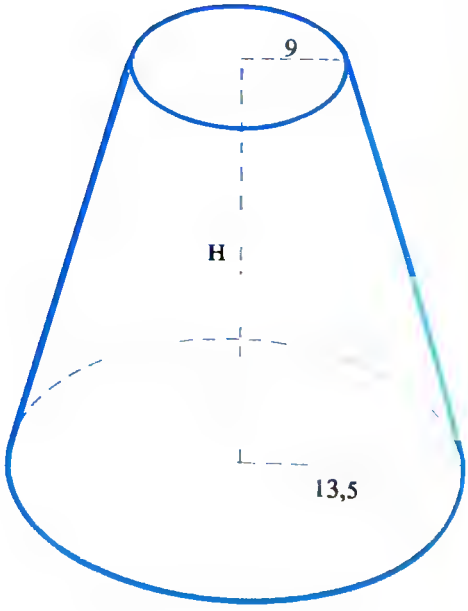
$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi \cdot 15}{3}(22^2 + 22 \cdot 10 + 10^2) =$$

$$= 5\pi\,(484 + 220 + 100) = 4020\pi\ cm^3$$

Ej.: Hallar el volumen que engendra un trapecio rectángulo, que gira alrededor del lado perpendicular a las bases, siendo la menor de ellas de 9 m y la mayor los 3/2 de aquélla. Se sabe también que los 3/2 de su altura es igual a la suma de las bases.

Planteando las condiciones se obtienen los datos necesarios:

$$R = \frac{3}{2}9 = 13{,}5$$



$$\frac{3}{2}H = 9 + 13{,}5 \rightarrow \frac{3H}{2} = 22{,}5 \rightarrow H = \frac{2 \cdot 22{,}5}{3} = 15\ m$$

Luego el volumen es:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi \cdot 15}{3}(13{,}5^2 + 13{,}5 \cdot 9 + 9^2) =$$

$$= 5\pi\,(182{,}25 + 121{,}5 + 81) = 1923{,}75\pi\ m^3$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA CUESTA DE LA PAGINA 557.

Para ver mejor el problema pongamos que una cuesta tiene 3 Km de subida. Al ir subiendo a una velocidad de 3 Km por hora se tarda 1 hora en subir. Al bajar la **misma cuesta** (3 Km) y a una velocidad de 6 Km por hora se tarda **MEDIA HORA** en bajar.

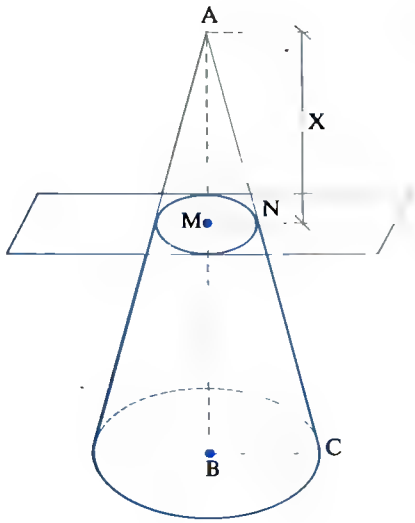
En hora y media ha recorrido 6 Km, luego la velocidad media es de 4 Km/h.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL BILLAR DE LA PAGINA 557.

Hace tiempo os puse un problema que, de sencillo que era, lo hicisteis más difícil, ya que no creíais que lo pusiera tan facilón. Este es igual de sencillo.

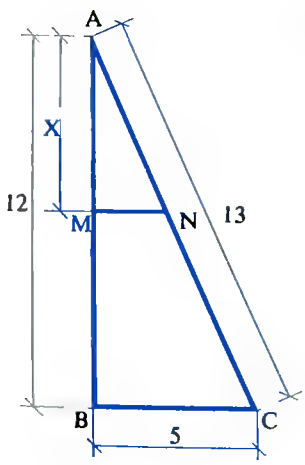
Si Raúl da a Miguel 20 carambolas a 100 y Francisco da a Raúl también 20 a 100, se ve normalmente que Francisco debe dar a Miguel 40 carambolas a 100. Así de fácil, pero veamos: lo que da Francisco a Raúl (20 a 100) es 1/5 de partida y Raúl a Miguel lo mismo, o sea, otra 1/5 parte de partida. Francisco le tendrá que dar a Miguel 1/5 + 1/5 = 2/5 de partida, y dos quintos de 100 son 40.

Ej.: Averiguar a qué distancia del vértice de un cono de revolución de 13 cm de lado y 5 cm de radio se ha de trazar un plano paralelo a la base que divida a la superficie lateral del cono en dos partes equivalentes.



Es obvio que lo que debemos de calcular es la distancia x expuesta en la figura. Como se observa, el plano divide al cono en otro cono y en un tronco de cono, cuyas superficies laterales han de ser iguales. Esta condición del problema la vamos a intentar poner en función de x.

Obsérvese el triángulo $\widehat{ABC}$ de la figura, donde vamos a calcular todas las longitudes que faltan en función de x, necesarias para hallar las superficies laterales de ambas figuras.



Por Pitágoras en el triángulo $\widehat{ABC}$.

$$13^2 = 5^2 + \overline{AB}^2 \rightarrow \overline{AB}^2 =$$

$$= 169 - 25 = 144$$

$$\overline{AB} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$\widehat{AMN} \sim \widehat{ABC} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{x}{12} = \frac{\overline{MN}}{5} \rightarrow \overline{MN} = \frac{5x}{12}$$

Aranjuez perteneció en la Edad Media a la Orden de Santiago, pasando luego con el Maestrazgo al poder de los Reyes Católicos.

Felipe II decidió construir un edificio de noble trazado en este lugar y encargó los planos a Juan Bautista de Toledo y a Juan de Herrera, los arquitectos de El Escorial.

Aunque subsiste parte de la primitiva obra, Carlos III y, especialmente, Carlos IV, procuraron el embellecimiento de este Real sitio.

Se construye por Jaime Marquet el teatro, por Sabatini el Convento e iglesia de San Pascual y por Isidro González Velázquez la Casa del Labrador.

El río Tajo, que da fertilidad a la vega, limita la parte principal de los bellos jardines.

El Palacio Real tiene una gran belleza en su interior. Llama la atención la grandiosa escalera. La Sala China está cubierta totalmente por piezas de porcelana policromadas de estilo rococó, fabricadas entre 1759 y 1765 en los talleres situados en el Buen Retiro.

También guarda verdaderas joyas en tapices, mobiliario de la época y pinturas de artistas famosos.

Son notables sus colecciones de relojes, estatuas en mármol griego y de Carrara, porcelanas del Buen Retiro, de Sevres, y mosaicos romanos procedentes de Mérida.

El descubrimiento de antigüedades es un lucrativo negocio que siempre ha existido. Para aclarar si una pieza es falsa o auténtica hoy día existen muchos medios.

Un reconocido experto en el arte de la restauración y tasación, Sidmund Rostchild, que ha estudiado toda clase de objetos, cuenta que una de sus mayores emociones fue la vez que, limpiando un cuadro de una clienta que había pagado por él cien dólares, descubrió que se trataba de un auténtico Tiziano. Tizianos hay muy pocos porque el Museo del Prado de Madrid los tiene casi todos.

Rostchild no hace juicios apresurados cuando tasa o califica un objeto. En su casa dispone de un completo laboratorio, con rayos X, ultravioleta, infrarrojos, fotografía comparativa y potentes microscopios.

El afirma que casi todas las piezas, aunque no sean auténticas, tienen su valor. Los coleccionistas de cosas antiguas caen por lo general en el error de exagerar su valor.

Hace poco un abuelo le llevó una pieza labrada en marfil en forma de cañón montada sobre caoba; pertenecía a su familia desde hacía mucho tiempo. Siguiendo pacientemente las pistas se confirmó que esta pieza había sido un obsequio del rey de España a Enrique XIII, una verdadera pieza de museo.

$$\widehat{AMN} \sim \widehat{ABC} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{x}{12} = \frac{\overline{AN}}{13} \rightarrow \overline{AN} = \frac{13x}{12}$$

$$\overline{NC} = \overline{AC} - \overline{AN} = 13 - \frac{13x}{12} = \frac{156 - 13x}{12}$$

Superficie lateral del cono correspondiente al triángulo $\widehat{ABC}$:

$$Sl = \pi Rg = \pi \cdot \overline{MN} \cdot \overline{AN} = \pi \cdot \frac{5x}{12} \cdot \frac{13x}{12} = \frac{65\pi x^2}{144}$$

Superficie lateral del tronco de cono correspondiente al trapecio MNBC.

$$Sl = \pi g\,(R + r) = \pi\,\overline{NC}\,(\overline{BC} + \overline{MN}) = \pi\,\frac{156 - 13x}{12}\,(5 + \frac{5x}{12}) =$$

$$= \frac{\pi}{12}\,(156 - 13x)\,(5 + \frac{5x}{12}) = \frac{\pi}{12}\,(780 + \frac{780x}{12} - 65x - \frac{65x^2}{12}) =$$

$$= \frac{\pi}{12}\,(780 - \frac{65x^2}{12})$$

Igualando las superficies laterales de ambas figuras:

$$\frac{65\pi x^2}{144} = \frac{\pi}{12}\,(780 - \frac{65x^2}{12}) \rightarrow \frac{65x^2}{12} = 780 - \frac{65x^2}{12}$$

$$\frac{65x^2}{6} = 780 \rightarrow x^2 = \frac{6 \cdot 780}{65} \rightarrow x^2 = 72 \rightarrow x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$$

10.—GEOMETRIA DE LA ESFERA

Se entiende por geometría esférica a la parte de la geometría que estudia las propiedades de la superficie esférica.

A.—Esfera

Cualquier semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro engendra una superficie llamada esférica. Al cuerpo que limita la superficie se le llama esfera, aunque ambas palabras se utilizan indistintamente para definir lo mismo.

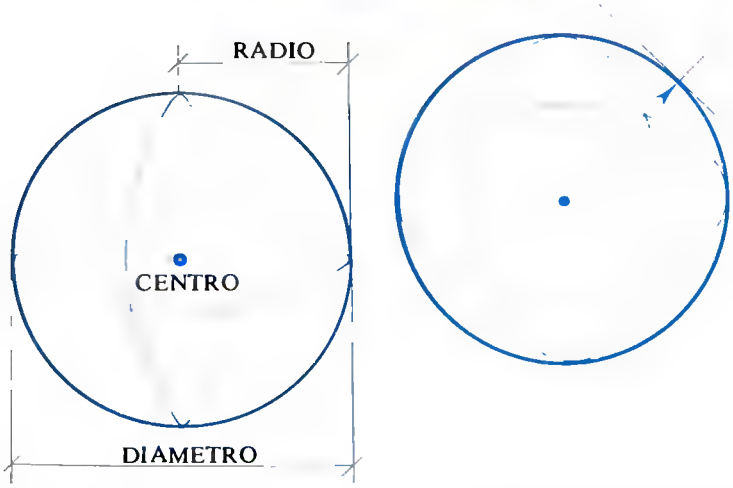
También se puede definir la superficie esférica como el conjunto de puntos del espacio que equidistan de un fijo, llamado **centro**. Se entiende por **radio** de una esfera a cualquier segmento que une el centro con cualquier punto de la superficie esférica y **diámetro** a cualquier segmento que pasando por el centro de la esfera tiene sus extremos situados en la superficie esférica.

Se llama **tangente** a la esfera en un punto de ella aquella que dista del centro de ésta, la longitud de su radio y tiene la propiedad de ser perpendicular a éste en el punto de contacto.

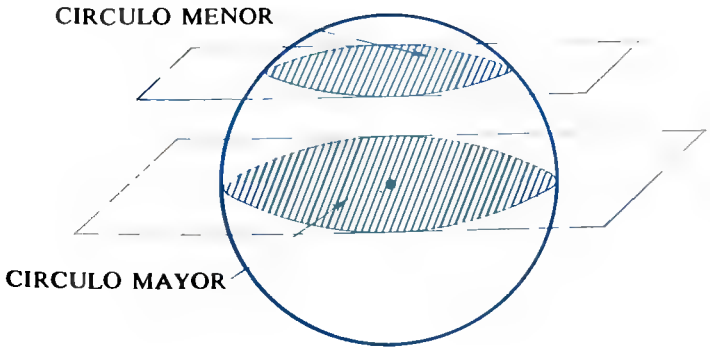
Además la perpendicular a la tangente de una esfera en su punto de contacto recibe el nombre de **normal.**

Cualquier plano tangente a la esfera en un punto de ella recibe el nombre de **plano tangente** y es perpendicular al radio correspondiente al punto de contacto.

Cualquier plano que contenga al radio de la esfera recibe el nombre de plano normal.



Cuando trazamos un plano cualquiera que corte a la esfera, éste produce en ella dos tipos de secciones, siendo ambas círculos. Si el centro de uno de estos círculos coincide con el centro de la esfera se le denomina **círculo máximo** y si el centro del círculo es distinto del centro de la esfera se le llama **círculo menor.**



Ahora que están tan de moda los partidos de tenis, vamos a poner un pequeño dilema respecto a este deporte-espectáculo.

La final de un campeonato de tenis estuvo tan disputada que tuvo que jugarse a 5 sets o partidos entre los jugadores A y B. El jugador A ganó el campeonato al ganar el tercero y definitivo partido.

El jugador B, perdedor honrosísimo del campeonato, le hizo a su contrincante las siguientes consideraciones:

"Mi felicitación ante todo, pero no te sientas muy superior a mí ya que, habiendo jugado todos los partidos (5 en total) al límite de 6 juegos (ya se sabe que en tenis tiene que haber 2 juegos de ventaja, jamás puede terminar un partido o set 6 a 5; si es así hay que seguir jugando hasta que existan dos juegos de diferencia y, a partir siempre de 6), te he sacado 6 juegos de ventaja, o mejor aún, esos 6 juegos de ventaja hacen un set completo y yo soy el vencedor moral del campeonato. ¿Qué sucedió? ¿Cuáles fueron los resultados de los partidos?

LA SOLUCION EN PAG. 607.

El arma más poderosa de los seres humanos es la palabra. Con ella, bien manejada, se puede conseguir guiar y estimular al hombre en cualquier dirección.

Se le puede impulsar a realizar acciones heroicas o sacar a la superficie sus instintos más bajos.

Sólo la especie humana dispone de la palabra para comunicarse.

Los animales más desarrollados pueden comunicarse, pero no disponen en su cerebro de un centro determinado para el lenguaje como tiene el cerebro humano.

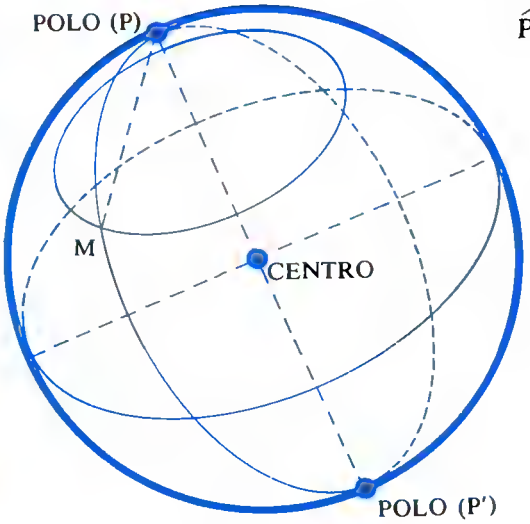
En su última evolución —que se puede situar en el último millón de años— el cerebro ha visto agrandarse enormemente los lóbulos frontales, que regulan la concepción del pasado y del futuro y que se consideran el asiento de la imaginación.

El señorío que ejerce el hombre sobre todas las fuerzas naturales se debe a su facultad de ver y sentir con su imaginación y posteriormente traducir estos efectos en palabras.

Se entiende por **polos** de un círculo máximo o menor de una esfera a los extremos del diámetro de la esfera perpendicular al círculo en cuestión. De esta forma cualquier punto de un círculo de una esfera equidista de los polos. A la distancia rectilínea del polo a un punto cualquiera de un círculo se la llama **distancia polar** y al arco esférico correspondiente se le denomina **radio esférico**.

$\overline{PM}$ = distancia polar

$\widehat{PM}$ = radio esférico



A la vista de lo expuesto, podemos hacer las siguientes consideraciones:

– Para definir un círculo menor de una esfera es necesario tres puntos de éste.

– Para definir un círculo máximo de una esfera bastan dos puntos ya que el otro, el centro de la esfera, es conocido.

– Cualquier círculo máximo divide a la esfera en dos partes iguales.

– Dos círculos máximos se dividen ambos en dos partes iguales.

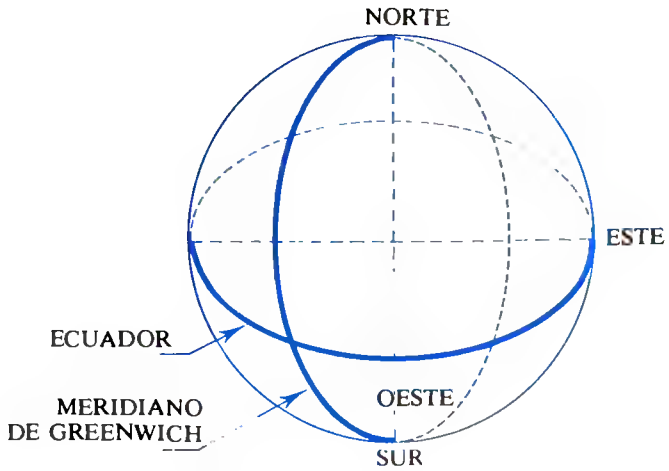
– Todos los círculos máximos de una esfera son iguales.

– Para que un círculo máximo y un círculo menor sean perpendiculares es necesario que el círculo máximo pase por los polos del círculo menor.

– Cualquier diámetro de una esfera puede considerarse como eje de revolución de la misma.

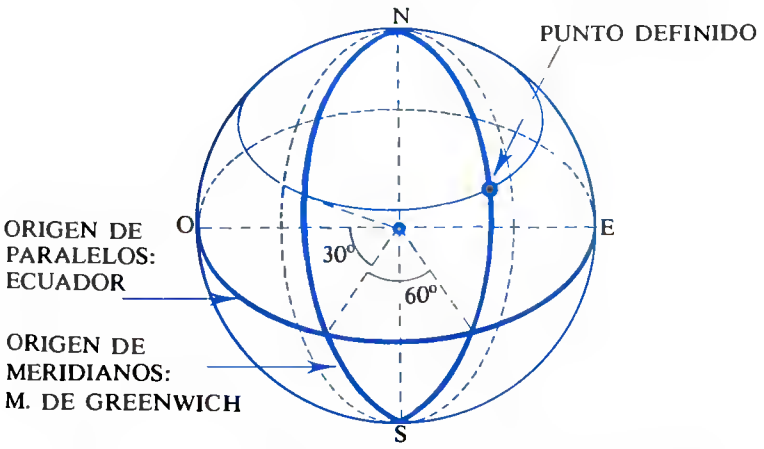
– Una recta cualquiera no puede cortar a la esfera en más de dos puntos (si es secante en dos puntos y si es tangente en un punto).

NOTA.–En las coordenadas geográficas en donde la Tierra se considera como esfera, el círculo máximo horizontal recibe el nombre de **ecuador** y a los círculos menores paralelos al ecuador se les llama **paralelos**. Los círculos máximos perpendiculares al ecuador se les llama **meridianos**.



Cualquier punto situado en la Tierra se determina por su paralelo (que indica la **latitud** del punto: Norte o Sur) tomando como origen al Ecuador y por su meridiano (que indica la **longitud** del punto: Este u Oeste) tomando como origen el meridiano de Greenwich.

Ej.: Si un punto de la Tierra tiene unas coordenadas geográficas de 60° longitud este y 30° latitud norte, su representación gráfica aproximada es de la forma:



La esfera es una figura que no admite como las anteriores un desarrollo perfecto sobre una superficie plana; sin embargo existen procedimientos aproximados que permiten su desarrollo y que consisten fundamentalmente en circunscribir cilindros o conos a la superficie esférica proyectando sobre éstos todos los puntos de la esfera para posteriormente desarrollar el cilindro o el cono sobre una superficie plana.

La utilización de un cilindro o un cono como figuras auxiliares para efectuar el desarrollo de una esfera está condicionada al grado de aproximación que se requiera y dependiendo de la parte de esfera en la que tenga más interés la aproximación (es de uso común la utilización del sistema Mercator para desarrollar la esfera correspondiente a la Tierra y basado en circunscribir un cilindro a ésta, con lo que la mayor aproximación en el desarrollo se adquiere en las zonas próximas al Ecuador).

No se hace uno viejo por haber vivido cierto número de años; se hace uno viejo porque ha abandonado su ideal. Los años arrugan la piel; renunciar a un ideal arruga el alma. Las preocupaciones, las dudas, los temores y las desesperaciones son los años que, lentamente, hacen que nos inclinemos sobre la tierra y nos convirtamos en polvo antes de morir.

Mac Arthur

Debemos trabajar por hacernos muy dignos de algún empleo; el resto no nos interesa; es cosa de los demás.

La Bruyère

Ser alguien antes de ser algo.

Thierry de Martel

El estilo es el hombre mismo.

Buffon

La paciencia es, a veces, el fruto más secreto de la impaciencia.

Cesbron

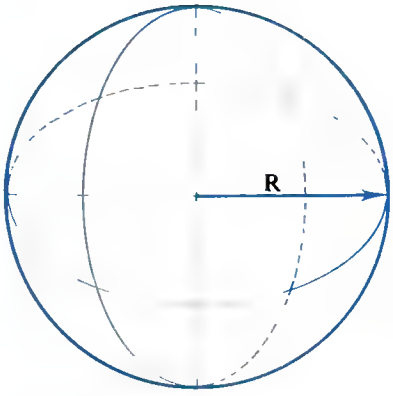
Todo anciano es una confesión y, si hay tantas vejeces vacías, es porque tantos hombres lo eran y lo ocultaban.

Malraux

Carlos III, Rey de España, que estaba dando los últimos toques al Palacio Real de Madrid, conocedor de la fama que en toda Europa tenía el veneciano Giambattista Tiépolo como pintor de frescos, invitó a éste a trasladarse a su Corte.

Aquí pintó sucesivamente el techo del Salón del Trono, el de la Sala de los Alabarderos y el de la Salita de la Reina. En todos ellos dejó volar su exuberante imaginación y entre las alegorías pintadas quedan algunas de las más vivas y bellas realizadas por el artista. En los techos abiertos de par en par hacia una gloriosa representación de la nación española, muestra el homenaje que le rinden las virtudes, las partes del Mundo, las tierras que descubrió y conquistó y las divinidades olímpicas. Aparte de estos grandiosos trabajos se conservan en el Museo de El Prado tres lienzos, dos de ellos pintados para la Iglesia de San Pascual de Aranjuez y uno que realizó como boceto para el techo que le soliciteron en la Corte Imperial Ruse. Murió en Madrid el 27 de Marzo de 1770.

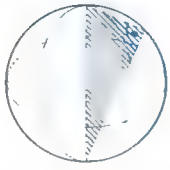
Por último vamos a definir el cálculo de la superficie y del volumen de una esfera.



$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

NOTA.—Para posteriores cálculos, téngase en cuenta que el resultado de unir cualquier punto situado en la superficie esférica con los extremos de un diámetro (los tres puntos estarán en un mismo plano), produce un arco capaz de 90° y en definitiva un triángulo rectángulo (recto en el punto de la superficie esférica).



Ej.: Hallar el área y el volumen de una esfera de 3 m. de radio.

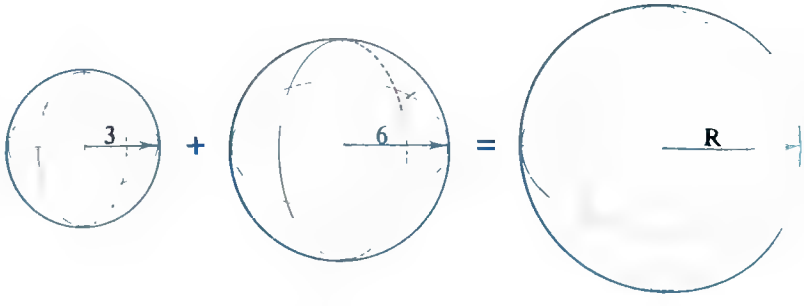
Aplicando las fórmulas:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ m}^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

Ej.: Dos globos tienen 3 cm y 6 cm de radio. Averiguar el radio de otro globo cuyo volumen sea la suma de los otros dos.

Formaremos una ecuación con la condición propuesta.

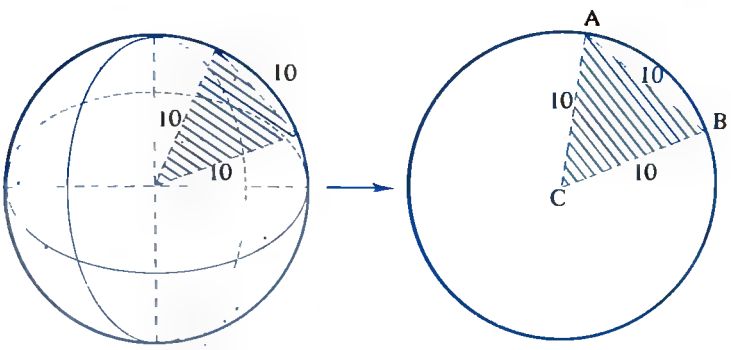


$$\frac{4}{3}\pi 3^3 \quad + \quad \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \quad = \quad \frac{4}{3}\pi R^3$$

Dividiendo toda la ecuación por $\frac{3}{4}\pi$ se obtiene:

$$27 + 216 = R^3 \rightarrow 243 = R^3 \qquad R = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}\text{ cm}$$

Ej.: Hallar la distancia esférica entre dos puntos de una superficie esférica de 10 cm de radio sabiendo que el segmento rectilíneo que une los puntos mide 10 cm.



Obsérvese que de lo que se trata de localizar es la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$, y como el triángulo $\overset{\frown}{ABC}$ es equilátero, el ángulo $\hat{C}$ correspondiente al sector circular es de 60°, luego la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es:

$$L = \frac{\pi R n^\circ}{180} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 60}{180} = \frac{10\pi}{3} \text{ cm}$$

Ej.: El volumen de una esfera en m^3 es igual al área de su superficie en m^2. Hallar el radio de la esfera.

Igualando el volumen a la superficie obtenemos una ecuación de donde obtenemos el radio.

$$V = S \to \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \to \frac{R^3}{3} = R^2$$

$$R^3 = 3R^2 \to R^3 - 3R^2 = 0;\ R^2(R-3) = 0 \begin{cases} R^2 = 0;\ R = 0 \\ R - 3 = 0;\ R = 3 \text{ m} \end{cases}$$

Ej.: El área de una superficie esférica es igual a 628 dm^2. Hallar el volumen de esta esfera.

Para calcular el volumen necesitamos conocer el radio de la esfera que lo obtendremos con el dato de su superficie.

$$S = 4\pi R^2 \to 628 = 4\pi R^2 \to R^2 = \frac{628}{4\pi} = 50$$

$$R = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ dm}$$

Luego su volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (5\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3\sqrt{2^3} = \frac{4\pi \cdot 5^3 \cdot 2\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{1000\pi\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$$

PROPIEDAD CURIOSA DEL NUMERO TRECE

Si se calculan los restos del número 13 respecto a los números primos menores, se obtiene:

$13 \equiv 1\ (2),\ 13 \equiv 1\ (3),$

$13 \equiv 3\ (5),\ 13 \equiv 6\ (7),$

$13 \equiv 2\ (11),$

la suma de dichos restos es:

$1 + 1 + 3 + 6 + 2 = 13$

Siendo la función $R(\rho)$, suma de los restos de un número primo ρ respecto a los números primos menores que él, una función que parece crecer más rápidamente que ρ, no parece posible que se obtenga otro valor distinto del 13 para el cual: $R(\rho) = \rho$.

Se da a continuación una tabla de los primeros valores de dicha función.

ρ	$R(\rho)$
3	1
5	3
7	4
11	B
13	13
17	1B
19	27
23	29
29	46
31	56
37	70
41	74
43	BB
47	9B
53	134
59	147
61	171
67	200
71	217
73	252
79	274
B3	309
B9	323
97	34B
..	...

La función $R(\rho)$ es creciente para sus primeros valores y es presumible conserve dicha propiedad, y aunque el crecimiento de $R(\rho)$ es en algún caso menor que el de ρ, $R(7) - R(5) = 1$, $R(23) - R(19) = 2$, es probable que sean los dos únicos ejemplos en que esto suceda.

Un pájaro singular, utilizado por el hombre desde muy antiguo, símbolo de la paz, es la paloma, y dentro de esa especie la paloma mensajera, que prestó y presta grandes servicios comunicando personas entre sí.

Cuando la paloma mensajera alcanza su más alta velocidad puede llegar a los 90 Km. por hora.

Los mensajes se suelen introducir en unos recipientes metálicos con cierre hermético y de tamaño apropiado que se les sujeta a una de las patas del animal.

Ya en los libros sagrados se cita su salida del Arca de Noé y su regreso con la rama de olivo para comunicar a éste que la tierra podía volver a ser habitada.

La virtud de retornar siempre a su lugar de origen se aumenta después de someterlas a especiales entrenamientos que desarrollan su instinto de observación y orientación que las permite sobrevolar campos, ciudades y zonas marítimas, volviendo siem-pre a su palomar.

Hoy, que salvo casos excepcionales de catástrofes o inundaciones, sus servicios no son absolutamente necesarios, ae siguen criando por expartos agrupedos en asociaciones de tipo deportivo que organizen torneos y campeonatos para mejorar constantemente lea razas.

Ej.: Dos esferas son tales que la diferencia de sus radios es igual a 1 dm y la de sus volúmenes $\frac{76}{3}\pi$ dm^3. Calcular sus radios.

Formamos un sistema de ecuaciones con las dos condiciones expuestas, llamando R y r a los radios de ambas esferas.

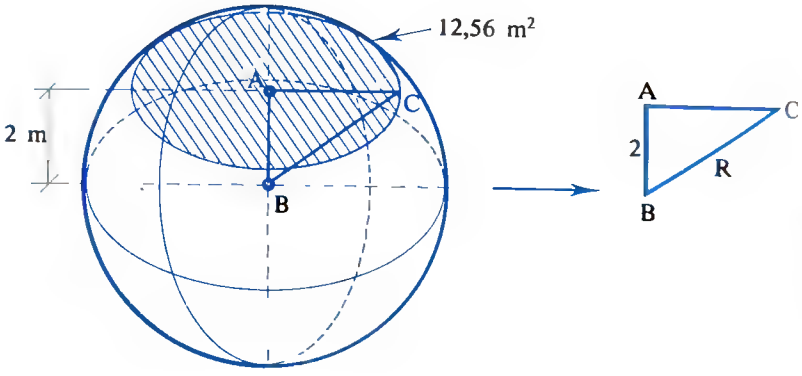
$$\left.\begin{array}{l} R - r = 1 \\ \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{76}{3}\pi \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} R - r = 1 \\ 4R^3 - 4r^3 = 76 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} R - r = 1 \\ R^3 - r^3 = 19 \end{array}\right\} R = 1 + r$$

$$(1 + r)^3 - r^3 = 19 \rightarrow 1 + r^3 + 3r + 3r^2 - r^3 = 19 \rightarrow 3r^2 + 3r - 18 = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}$$

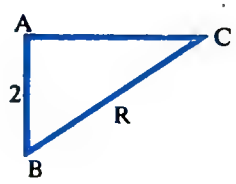
$$r = 2 \text{ dm} \rightarrow R = 1 + r = 1 + 2 = 3 \text{ dm} \rightarrow R = 3 \text{ dm}$$

Ej.: Calcular el volumen de una esfera sabiendo que uno de sus círculos menores tiene 12,56 m^2 de área y dista 2 m del centro de la esfera.



Lo inmediato es obtener el radio de la esfera, necesario para calcular su volumen. El radio lo obtendremos aplicando un Teorema de Pitágoras en el triángulo $\widehat{ABC}$, previo cálculo de la distancia $\overline{AC}$ con el dato del área del círculo menor.

$$S = \pi r^2 \rightarrow S = \pi\, \overline{AC}^2 \rightarrow 12{,}56 = \pi \cdot \overline{AC}^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = \frac{12{,}56}{\pi} = 4$$



$$\overline{AC} = \sqrt{4} = 2 \text{ m}$$

$$R^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow R^2 = 4 + 4 \rightarrow R^2 = 8$$

$$R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

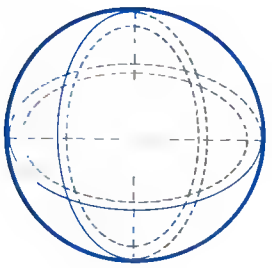
Luego el volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\sqrt{2})^3 = \frac{4\pi \cdot 2^3 \sqrt{2^3}}{3} = \frac{4\pi \cdot 2^3 \cdot 2\sqrt{2}}{3} =$$

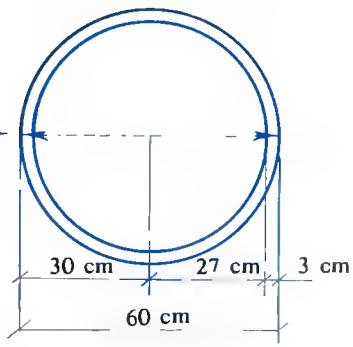
$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{3}\ m^3$$

Ej.: Una bola hueca tiene 60 cm de diámetro y un espesor de 3 cm. Hallar el área de la superficie interna, de la externa y el peso de la bola, sabiendo que la densidad del material de que está constituida es 2,5 gr/cm^3.

Esfera hueca



Círculo máximo de la esfera hueca



Obsérvese en la esfera que al considerar un círculo máximo de la esfera en cuestión, se ven con más claridad los datos del problema.

Así que los radios de las esferas exterior e interior son respectivamente de 30 cm y 27 cm, luego las áreas pedidas son:

$$S_{exterior} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 30^2 = 3600\pi\ cm^2$$

$$S_{interior} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 27^2 = 2916\pi\ cm^2$$

Para hallar el peso de la esfera hueca es necesario conocer el volumen del material y aplicar la fórmula.

$$Densidad = \frac{Peso}{Volumen} \rightarrow Peso = Densidad \cdot Volumen$$

El volumen de material es el volumen de la esfera exterior menos el volumen de la interior.

$$V = V_{exterior} - V_{interior} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 30^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 27^3 = 36000\pi - 26244\pi = 9756\pi\ cm^3$$

Luego su peso es:

$$Peso = Densidad \cdot Volumen = 2{,}5\ \frac{gr}{cm^3} \cdot 9756\pi\ cm^3 = 24390\pi\ gr$$

En el aeropuerto de Madrid-Barajas una familia va a despedir a otra que parte para Buenos Aires. Las familias se componen de varios hombres y varias mujeres cada una (nunca un hombre y una mujer).

Cuando llega el último momento de la despedida, cada hombre se despide del otro hombre con un apretón de manos. Cada mujer, al despedirse, besa a cada mujer y a cada hombre. Yo, desde un rincón, conté 27 apretones de manos y 33 besos.

Se pregunta: ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres componían ambas familias?

LA SOLUCION EN PAGINA 608

Comidas extravagantes para nosotros, no lo son tanto para otros habitantes del planeta. Así, un menú exótico completo se podría componer de una sopa de nidos de golondrina, manjar para los chinos; luego un guiso de gusanos que nacen en el corazón de los datileros, apreciadísimos por los negros antillanos; vendría después una parrillada de langostas del desierto; a continuación una ensalada de pepinos de mar recogidos en las costas africanas, y, por último, serviría como postre galletas confeccionadas con tierra arcillosa, golosina considerada como insuperable por los anamitas.

Nosotros no apreciamos semejante menú, y sin embargo una parte de la humanidad se alimenta con comidas tan poco apetecibles como éstas.

En ciertas partes del Brasil los nativos se deleitan comiendo hormigas, que toman asadas, como las castañas.

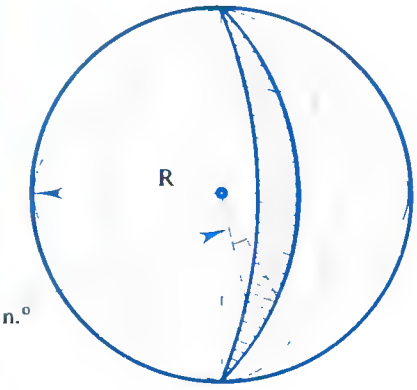
(Continúa en la página siguiente)

B.—Huso esférico

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máximas. El ángulo que forman estas dos semicircunferencias es el ángulo del huso.

Mediante una regla de tres podemos obtener su área.

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \text{ —— } 4\pi R^2 \\ n^\circ \text{ —— } S \end{array}\right\} \quad S = \frac{4\pi R^2 \cdot n^\circ}{360} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{90}$$



$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{90}$$

NOTA. -Un huso esférico carece de volumen, ya que consiste únicamente en una porción de superficie esférica.

Ej.: Halla el área de un huso esférico de 30° en una esfera de 5 m de radio.

Aplicando la fórmula:

$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{90} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 30}{90} = \frac{25\pi}{3} \text{ m}^2$$

Ej.: Un huso esférico de ángulo igual a 20° 30′ es equivalente a un sector circular cuyo ángulo es 4° 6′ y su radio de 10 cm. Hallar el radio de la esfera a que pertenece el referido huso.

Como dice el problema que el área del huso es la misma que la del sector circular dado, vamos pues a hallar el área del sector.

Previamente es conveniente pasar todos los ángulos a grados, transformando los minutos correspondientes.

$$20^\circ\ 30' = 20^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(20 + \frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{41}{2}\right)^\circ$$

$$4^\circ\ 6' = 4^\circ + \left(\frac{6}{60}\right)^\circ = \left(4 + \frac{1}{10}\right)^\circ = \left(\frac{41}{10}\right)^\circ$$

$$S_{\text{sector}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot \frac{41}{10}}{360} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 41}{10 \cdot 360} = \frac{41\pi}{36} \text{ cm}^2$$

$$S_{sector} = S_{huso} = \frac{\pi R^2 n^o}{90} \rightarrow \frac{41\pi}{36} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \frac{41}{2}}{90}$$

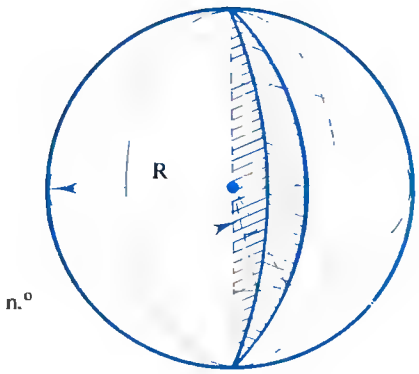
Ecuación de donde obtenemos el radio de la esfera.

$$\frac{41\pi}{36} = \frac{\pi R^2 \cdot 41}{180} \rightarrow \frac{1}{36} = \frac{R^2}{180} \rightarrow R^2 = \frac{180}{36} = 5$$

$$R = \sqrt{5}\ cm$$

C.–Cuña esférica

Es la porción de esfera comprendida entre dos semicircunferencias máximas y el huso esférico que las limita (la amplitud de la cuña es la misma que la del huso que la limita).



La superficie de una cuña esférica equivale a la superficie de los dos semicírculos máximos (en total un círculo máximo) más el área del huso.

$$S = \pi R^2 + \frac{\pi R^2 n^o}{90}$$

El volumen de una cuña esférica se obtiene fácilmente mediante una regla de tres.

$$\left.\begin{array}{l} 360^o \text{——} \frac{4}{3}\pi R^3 \\ n^o \text{———} V \end{array}\right\} \rightarrow V = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 n^o}{360} = \frac{4\pi R^3 n^o}{3 \cdot 360} = \frac{\pi R^3 n^o}{270} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{V = \frac{\pi R^3 n^o}{270}}$$

El naturalista Humboldt comió en una expedición larvas de varias especies de orugas que los indios sacan del tronco de la acacia y que hacen endurecer sobre el fuego.

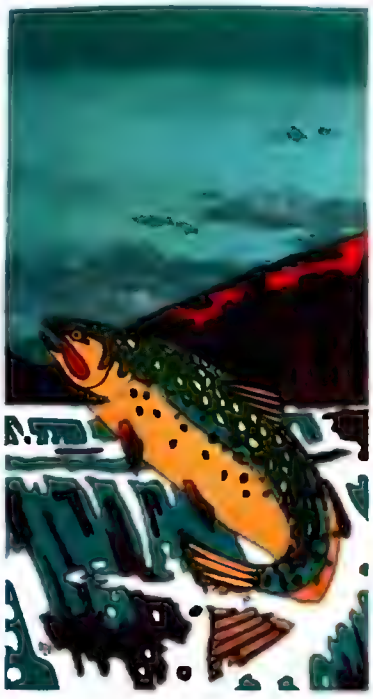
En Java y Sumatra, la arcilla que comen los indígenas es sometida a una preparación especial.

Se elige y se mezcla la pasta con agua, separando las materias extrañas, arena, piedrecitas, etc.; luego se extiende sobre planchas de hierro y se asa, resultando unas galletas que gustan mucho.

De estas extrañas golosinas solamente el hierro y el sodio pueden ser asimilados por el cuerpo humano.

La tierra amarilla necesaria para fabricar estos postres se encuentra en las plantaciones de café.

En el Tonkín, el postre más gustado son las llamadas "orejas de gato" consistentes en finas virutas obtenidas de un bloque compacto de tierra gris, que luego de ser amasada es puesta a secar sobre piedras calientes; una vez seca adquiere un hermoso y apetitoso color rojizo.



Un impulso natural obliga a los peces migratorios a dejar los ríos en que nacieron para lanzarse al océano.

Cuando se acerca la época migratoria, el joven salmón cambia de color, se vuelve plateado, deja el fondo del río y vaga por la superficie dejando que las aguas lo arrastren al mar y allí se interna miles de kilómetros en alta mar.

En cierta época de su vida vuelven infaliblemente al lugar de su nacimiento; un instinto natural o un sorprendente mecanismo de memoria individual los lleva a identificar el camino por el olor característico de la flora acuática.

Cada río tiene un olor orgánico típico y el salmón remonta contra la corriente el río donde nació porque reconoce este olor.

Otros investigadores piensan que los peces poseen una especie de "brújula solar", es decir, que son capaces de trazar su ruta tomando el sol como punto de referencia.

Ej.: Hallar la superficie y el volumen de una cuña esférica de 3 m de radio y de 30°.

Aplicando las fórmulas se obtiene:

$$S = \pi R^2 + \frac{\pi R^2 n^\circ}{90} = \pi \cdot 3^2 + \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 30}{90} = 9\pi + 3\pi = 12\pi \text{ m}^2$$

$$V = \frac{\pi R^3 \cdot n^\circ}{270} = \frac{\pi \cdot 3^3 \cdot 30}{270} = 3\pi \text{ m}^3$$

Ej.: Hallar el ángulo diedro correspondiente a una cuña esférica cuyo volumen es de 162π m^3 y pertenece a una esfera de 18 m de diámetro.

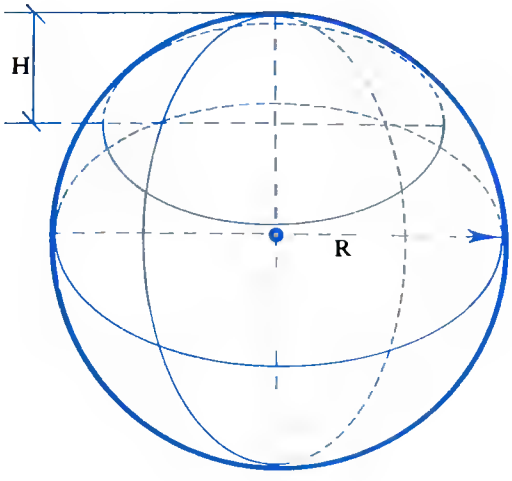
Utilizando la fórmula del volumen que es el dato, se obtiene:

$$V = \frac{\pi R^3 \cdot n^\circ}{270} \rightarrow 162\pi = \frac{\pi \cdot 9^3 \cdot n^\circ}{270} \rightarrow 162\pi = \frac{729\pi \cdot n^\circ}{270}$$

$$n^\circ = \frac{162\pi \cdot 270}{729\pi} = 60^\circ$$

D.—Casquete esférico

Es la porción de superficie esférica comprendida entre la esfera y un plano secante a ésta.



Su área se obtiene multiplicando la altura por la longitud de un círculo máximo de la esfera correspondiente.

$$S = 2\pi RH$$

Como es un casquete esférico, lo que se considera es la superficie; no admite el cálculo del volumen.

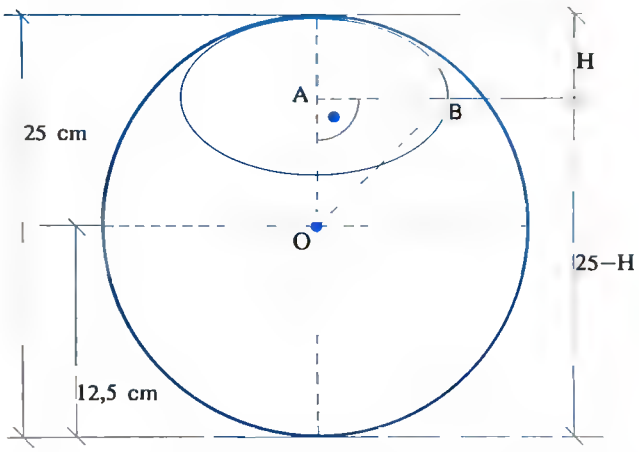
Ej.: La altura de un casquete esférico es de 5 dm y su área igual a $2{,}5\pi$ m^2. Hallar el radio de la esfera a la que pertenece.

Aplicando la fórmula del área del casquete, podemos obtener el radio de la esfera **R**.

$$S = 2\pi RH \rightarrow 25\pi = 2\pi R \cdot 5 \rightarrow R = \frac{25\pi}{10\pi} = 2{,}5 \text{ dm}$$

Ej.: Una superficie esférica de 25 cm de diámetro se divide por un plano en dos casquetes tales que el área del mayor es nueve veces el área del menor.

Hallar las áreas de los dos casquetes y el área del círculo que determina dicho plano al cortar a la superficie esférica.



Utilizando la condición del problema planteamos una ecuación de donde obtenemos H:

$$2\pi R\ (25 - H) = 9 \cdot 2\pi RH \rightarrow 25 - H = 9H \rightarrow 25 = 10H$$

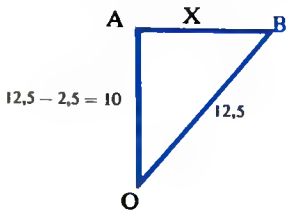
$$H = \frac{25}{10} = 2{,}5 \text{ cm}$$

Luego el área de los dos casquetes es:

$$S_1 = 2\pi RH = 2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 2{,}5 = 62{,}5\pi \text{ cm}^2$$

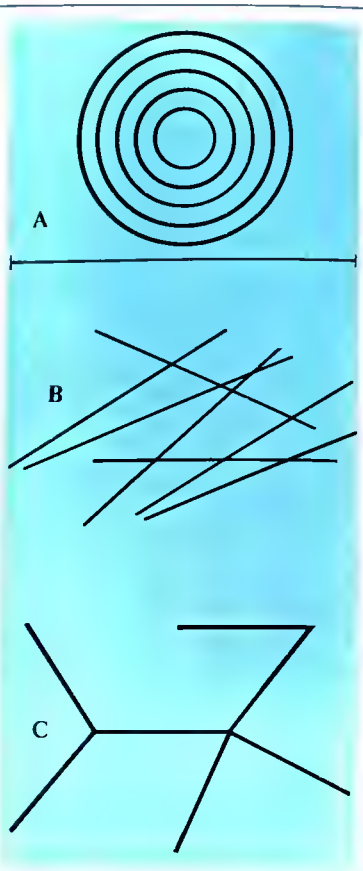
$$S_2 = 2\pi RH = 2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 22{,}5 = 562{,}5\pi \text{ cm}^2$$

Para calcular el área de la sección producida por el plano en la esfera es necesario calcular el radio $\overline{AB}$ del círculo correspondiente mediante la aplicación de un Teorema de Pitágoras al triángulo $\widehat{OAB}$ rectángulo:



$$12{,}5^2 = x^2 + 10^2 \rightarrow 156{,}25 = x^2 + 100$$

$$x^2 = 56{,}25 \rightarrow x = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5 \text{ cm}$$



Invitamos a nuestros lectores a que ejerciten su capacidad visual de calcular distancias.

En la parte superior pueden verse una serie de dibujos en los que pedimos: (A) indique cuál de las circunferencias inscritas tiene la longitud de la línea recta; (B) de este grupo de líneas, cuáles y cuántas son paralelas; (C) indicar qué línea es la más larga.

Buscar un número múltiplo de 7, cuyas cifras son todas distintas, que tiene 24 divisores y si se multiplica por 10 se convierte en cuadrado perfecto.

Determinar, razonadamente, este número y el de soluciones que tiene el problema.

Solución:

Por ser múltiplo de 7 contiene a este factor. Por convertirse en cuadrado perfecto al multiplicarlo por $10 = 2.5$, contiene los factores 2 y 5, afectados de exponente impar, debiendo ser par el exponente de 7.

El número de factores está dado por:

$r = (x + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)(\delta + 1)\ldots =$

$= 24 = 3.2.4. = 3.2.2.2$

Pero en virtud del enunciado solamente es válida la descomposición $24 = 3.2.4$ y el número buscado no tendrá más factores primos que los 2, 5 y 7, pues si tuvieran más factores primos que éstos, el exponente de tales factores sería forzosamente impar y el número no sería cuadrado perfecto.

Así pues se verificará:

$\alpha + 1 = 3$ $\boxed{\alpha = 2}$

$\beta + 1 = 2$ $\boxed{\beta = 1}$

$\gamma + 1 = 4$ $\boxed{\gamma = 3}$

o bien

$\boxed{\alpha = 2}$ $\beta + 1 = 4$ $\boxed{\beta = 3}$

$\gamma + 1 = 2$ $\boxed{\gamma = 1}$

y habrá dos soluciones posibles:

$N_1 = 7^{\alpha} 2^{\beta} 5^{\gamma} = 7^2.2.5^3 = 12250$

$N_2 = 7^{\alpha} 2^{\beta} 5^{\gamma} = 7^2.2^3.5 = 1960$

Siendo válida la 2.ª:

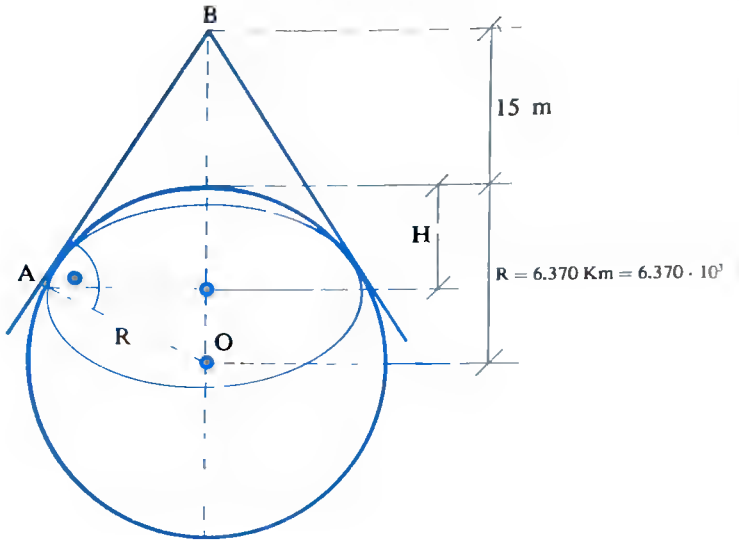
$\boxed{N_2 = 1960}$

pues la primera tiene dos cifras iguales.

Luego el área de la sección es:

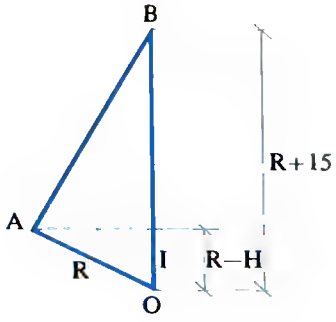
$$S = \pi R^2 = \pi \cdot 7{,}5^2 = 56{,}25\pi \text{ cm}^2$$

Ej.: Hallar la superficie del casquete terrestre iluminado por un foco situado a 15 m de altura de la superficie terrestre (radio de la Tierra = 6.370 Km).



Es evidente que necesitamos calcular la altura H del casquete para hallar su superficie.

Esta altura H la obtenemos mediante la aplicación del teorema del cateto al triángulo $\widehat{OAB}$ de la figura.



$$R^2 = (R + 15)(R - H) \rightarrow \frac{R^2}{R + 15} = R - H \rightarrow H = R - \frac{R^2}{R + 15}$$

$$= \frac{R^2 + 15R - R^2}{R + 15} = \frac{15R}{R + 15}$$

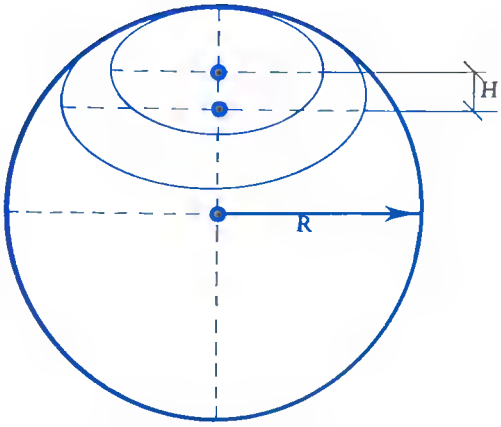
$$H = \frac{15R}{R + 15} = \frac{15 \cdot 6.370 \cdot 10^3}{6.370 \cdot 10^3 + 15} \simeq 14 \text{ m}$$

Luego el área del casquete iluminado es:

$$S = 2\pi RH = 2\pi \cdot 6.370 \cdot 10^3 \cdot 14 = 178.360.000\pi \text{ m}^2$$

E.—Zona esférica

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos y secantes a la esfera. Las secciones producidas por estos dos planos son círculos.



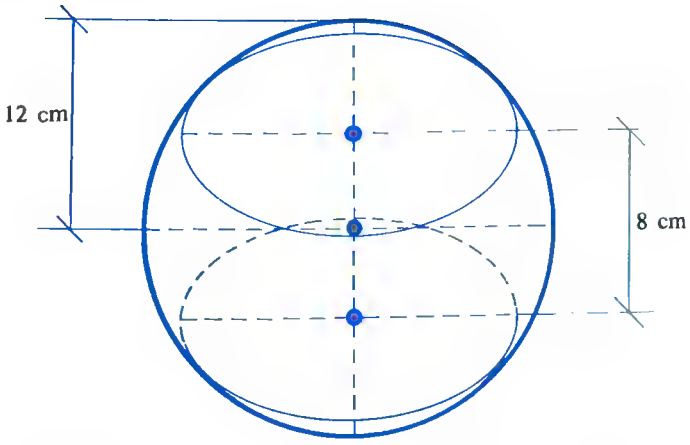
Su área se obtiene multiplicando su altura por la longitud de un círculo máximo de la esfera correspondiente.

NOTA.—Obsérvese que la forma de obtener el área de una zona esférica es igual que la forma de obtener el área de un casquete esférico.

$$S = 2\pi R \cdot H$$

En una zona esférica lo que se considera es la superficie de ésta, no admitiendo cálculo el volumen.

Ej.: Se trazan dos planos equidistantes 4 cm del centro de una esfera de 12 cm de radio. Hallar el área de la zona determinada por dichos planos.



Aplicando la fórmula de la zona esférica se obtiene:

$$S = 2\pi RH = 2\pi \cdot 12 \cdot 8 = 192\pi \text{ cm}^2$$

Durante la erupción de un volcán por su cráter fluyen humo, cenizas y lava. Esta lava fluye en forma semilíquida y va formando el cono del cráter.

En ciertas ocasiones, la lava suele solidificarse en el interior del cono formando entonces un enorme tapón de kilómetros que obstruye el cráter. En ocasiones va creciendo la presión en el interior del volcán, hasta tal punto que puede dar lugar a una explosión que haga saltar por los aires la parte del mismo cono, como ocurrió en el volcán Perbuatan, que casi borró del mapa la isla de Krakatoa en el año 1883. Fue de tal magnitud que las cenizas expulsadas fueron puestas en órbita alrededor de la tierra produciendo fenómenos visuales durante semanas.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL TURISTA DE LA PAGINA 570.

Si en lugar del traje, el capote y la montera, el turista hubiera comprado solamente 2 monteras, en lugar de 140.000 ptas. habría pagado tanto menos cuanto más baratos cuestan la montera y el traje y el capote juntos, o sea, 120.000 ptas. menos. Por lo tanto, las 2 monteras costaron 140 − 120 = 20.000 ptas.; 20.000 : 2 = 10.000 la montera.

Ahora sabemos que el traje y el capote valen 140.000 ptas. menos 10.000 = 130.000 ptas. y además que el traje vale 90.000 ptas. más que el capote.

Razonando como antes, supongamos que el turista, en lugar del traje y el capote, compra dos capotes; habría pagado 90.000 ptas. menos. Esto significa que los 2 capotes costaban: 130 − 90 = 40.000 ptas., luego 1 capote = 20.000 ptas.

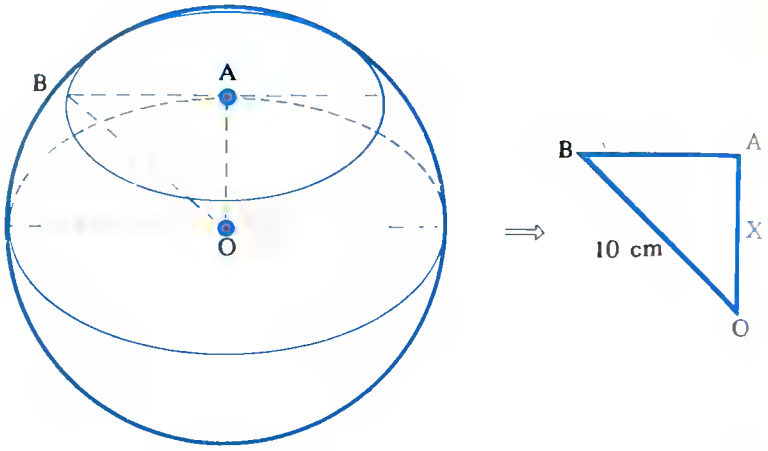
Por tanto

1 montera	20.000 ptas.
1 capote	20.000 ptas.
1 traje torero	110.000 ptas.
	140.000 ptas.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA PAGINA 566.

El ciego cargó a sus espaldas al paralítico y escaparon juntos; lo hicieron aprovechando lo mejor de cada uno.

Ej.: Calcular el área de una zona esférica en la que una base es un círculo máximo de radio 10 cm y el radio de la otra base es 8 cm.



Para calcular el área de la zona es necesario tener la altura de ésta ($\overline{AO} = x$), longitud que se consigue mediante la aplicación de un teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\widehat{AOB}$.

$$10^2 = 8^2 + x^2 \rightarrow 100 = 64 + x^2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Luego el área de la zona es:

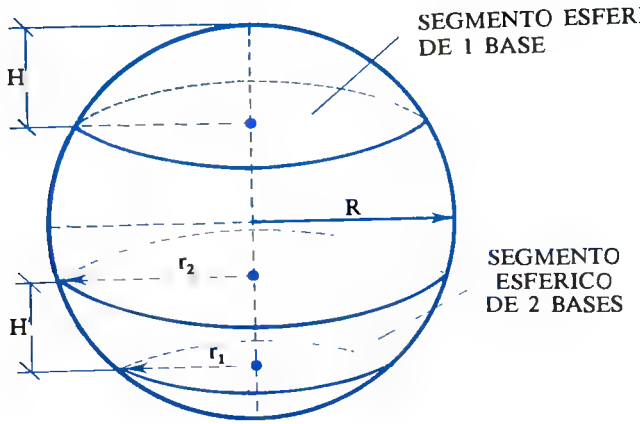
$$S = 2\pi RH = 2\pi \cdot 10 \cdot 6 = 120\pi \text{ cm}^2$$

Josep Maria Subirachs
Foot & Ball (1974)

F.—Segmento esférico

Se llama así a la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos. El casquete y la zona esférica son netamente figuras de superficie; sin embargo los volúmenes que en cada una de ellas caben son conceptos que reciben el nombre de segmentos esféricos (el volumen de un casquete es el volumen de un segmento esférico de una base y el volumen de una zona es el volumen de un segmento esférico de dos bases).

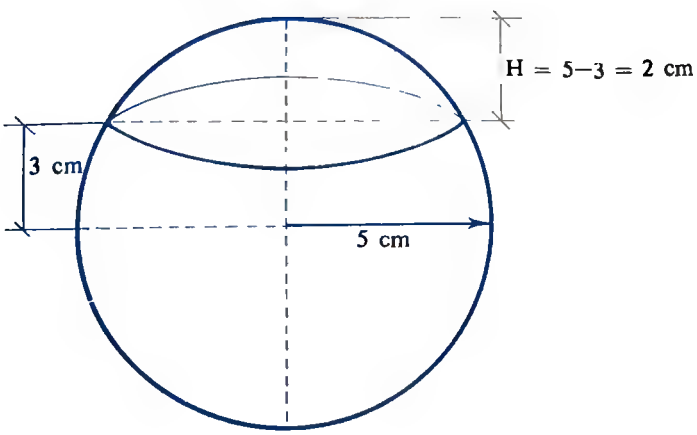
Así, pues, los segmentos esféricos son figuras que únicamente admiten el cálculo de su volumen (su superficie son correspondientes con casquetes o zonas).



$$V_{1B} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$$

$$V_{2B} = \frac{\pi H^3}{6} + \frac{\pi H}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

Ej.: En una esfera de 5 cm de radio se traza un plano que dista 3 cm del centro de dicha esfera. Calcular el volumen del menor de los dos segmentos en que la esfera queda dividida por dicho plano.



En una isla griega esta el Monte Athos, célebre desde la antigüedad.

La montaña santa emerge del agua; allí están los famosos conventos.

Aunque forma parte del territorio griego, es en realidad una república religiosa independiente. Los cuatro famosos monasterios eligen cada uno su dignatario y entre ellos rigen la montaña sagrada.

Existen unos veinte conventos en la montaña, y los monjes son de todas las nacionalidades.

Para desembarcar en esta isla son necesarias dos autorizaciones: la civil y la religiosa.

En 1060 se promulgó la Bula de Oro que contiene la regla por la que hoy todavía se rigen estos monjes bizantinos.

La montaña santa está prohibida a las mujeres y a todo animal hembra; se llama esta regla la de "Avatón", vigilando su cumplimiento a la entrada un guardia y un monje.

En Athos se conserva uno de los mayores trozos de la cruz de Cristo, y las bibliotecas conventuales son ricas en rarísimos manuscritos. Los frescos, las vírgenes bizantinas y evangeliarios de las iglesias son verdaderas obras de arte.

En la actualidad residen unos 3.000 monjes que cierran sus conventos y ermitas al caer la noche.

No utilizan campanas, pero sí troncos huecos que golpeados regulan las oraciones comunes.

Este conjunto de monasterios está habitado desde el año 1.000.

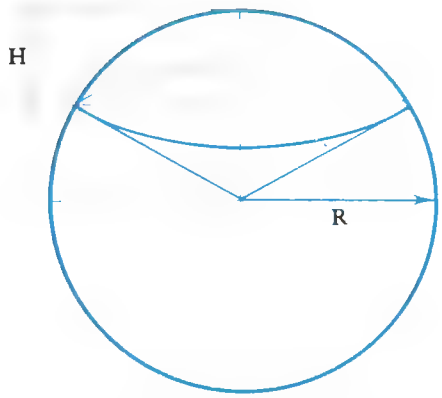
El plano propuesto divide a la esfera en dos casquetes que tratándose de hallar su volumen se corresponden con dos segmentos esféricos de una base, el menor es el que menos dista de la superficie esférica y para calcular su volumen necesitamos conocer su altura $H = 2$ cm.

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) = \pi \cdot 2^2 \left(5 - \frac{2}{3}\right) = 4\pi \frac{15-2}{3} =$$

$$= 4\pi \frac{13}{3} = \frac{52\pi}{3} \text{ cm}^3$$

G.—Sector esférico

Se entiende por sector esférico a la porción de esfera engendrada por un sector circular que gira alrededor de un diámetro que no le atraviesa.



El volumen de un sector esférico es el área de la zona o casquete que le sirve de base por un tercio del radio de la esfera correspondiente.

$$V = 2\pi RH \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 H \rightarrow \boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 H}$$

Neptuno fue uno de los dioses romanos más populares. Se le dedicaron varios templos, y gran número de esculturas suyas se conservan en los principales museos de Europa.

En el Museo del Prado existe una estatua de la escuela de Afrodisias de Caria. Cabe destacar como la más famosa la que se conserva actualmente en el Museo Lateranense de Roma.

Sus fiestas se celebraban con gran alegría, y los libros Sibilinos señalaban la fecha exacta en que tenían que celebrarse.

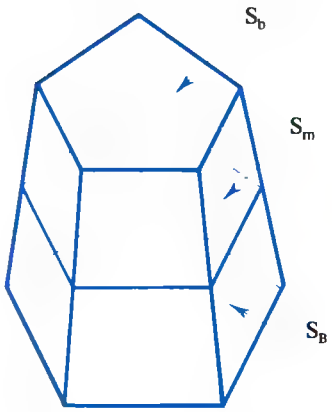
Este dios dominaba todo el elemento líquido. Reinaba sobre las aguas y era equivalente al Poseidón griego; ambos tenían sus palacios en el fondo de los mares. También era el que gobernaba los temblores de tierra. Siempre se le representa con sus atributos, el tridente y el caballo marino.

Aparte de las esculturas que recibían adoración en los templos, se han utilizado mucho como motivo ornamental en fuentes situadas en las vías públicas. En Madrid existe una hermosa estatua dedicada a este dios pagano, que realizaron conjuntamente el arquitecto Ventura Rodríguez y el escultor Juan Pascual de Mena. Fue construida en el año 1782.

11.–EL PRISMATOIDE Y SUS GENERALIZACIONES

Se entiende por prismatoide al cuerpo formado por dos bases polígonos cualesquiera situados en planos paralelos y cuyas caras laterales son los triángulos o trapecios que unen los vértices de las bases.

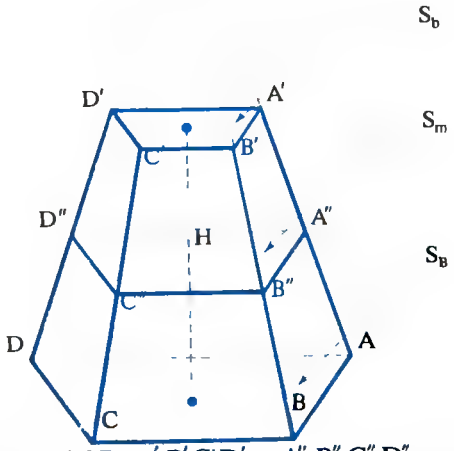
El volumen de un prismatoide es la sexta parte de su altura H (distancia entre sus bases) más la suma de las áreas de las dos bases más cuatro veces el área de la sección media equidistante de las bases.



$$V = \frac{H}{6}(S_B + S_b + 4S_m)$$

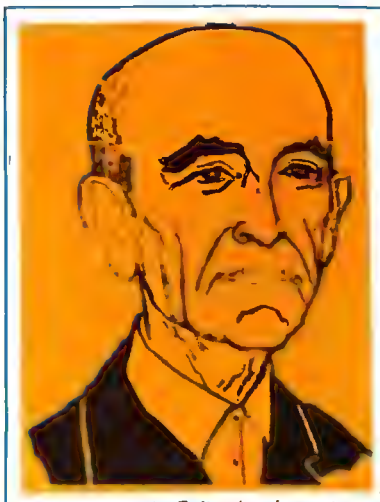
Esta fórmula reviste características importantísimas por sus múltiples aplicaciones, ya que existen multitud de figuras asimilables a un prismatoide aun con sólidos cuya forma geométrica no sea la del prismatoide.

Ej.: Obtener el volumen de un tronco de pirámide por la fórmula del prismatoide.



Los polígonos ABCD, A′B′C′D′ y A″B″C″D″ son semejantes y sus áreas están en relación al cuadrado de la razón de semejanza de cualquiera de sus lados homólogos.

(Téngase en cuenta que $\overline{A''B''} = \frac{\overline{AB} + \overline{A'B'}}{2}$



Manuel de Falla domina a las multitudes con el mágico hechizo de sus inspiradas composiciones de temas netamente españoles.

Este prestigioso compositor nació en Cádiz el 22 de Noviembre de 1876. Fue alumno de Pedrell, y posteriormente en Francia trabajó siete años con Debussy, que siempre le profesó gran cariño.

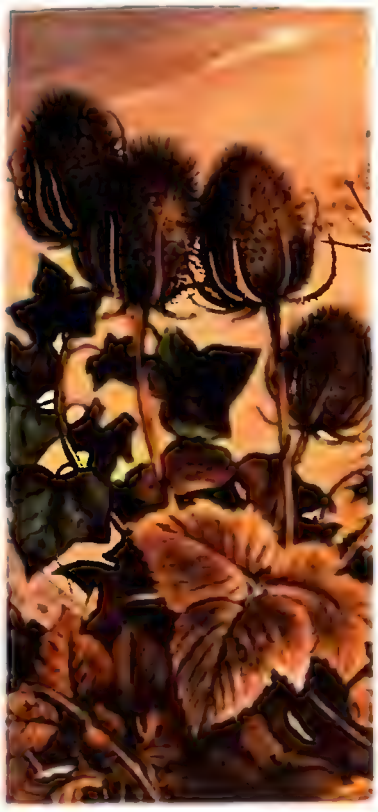
Falla, cuya producción no fue muy abundante, ofrece a los amantes de la buena música las más puras y delicadas esencias nacionales que apartando su música de los ritmos flamencos hace su obra profundamente española.

Falla es el Debussy de Andalucía y Castilla. Sin copiar a éste ni perder un ápice de su recia personalidad, compone con ritmo y armonía ajustada a la índole peculiar de la música española y justifica la celebridad de la misma en todo el mundo.

En 1915 estrena "La Vida Breve" y el "Amor Brujo". Esta última quizás sea su obra más personal; en ella aparece recreado el sentimiento andaluz y el universo místico del cante jondo. "El Sombrero de Tres Picos", de ritmo trepidante y con turbulentas danzas, fue adaptado para ballet. Se estrenó en Londres con decorados de Picasso.

La tercera de sus grandes obras teatrales, "El Retablo de Maese Pedro", consiste en la adaptación escénica de este célebre capítulo del Quijote.

Murió en el año 1946 en Alta-Gracia (Argentina).



La terminología matemática ha sido tomada generalmente del lenguaje vulgar, y la mayoría de las veces ha evolucionado posteriormente su primitivo significado para representar ideas abstractas tan alejadas de su acepción originaria que ni siquiera son aplicables al caso que sirvió para establecer su nomenclatura.

La nomenclatura científica se presenta en general constituida por nombres aislados que deben ser clasificados en conjuntos, para presentar una sinopsis adecuada, supliendo las diferencias terminológicas y estableciendo dúctiles y a la par severas normas de flexión que nos liberen de la pobreza dialéctica que padecemos.

Tan habituados estamos a desenvolvernos con la pobreza de términos de que disponemos, que rutinaria y habitualmente la suplimos con metáforas y circunloquios que complican y dificultan la labor extraordinariamente, dando una aparente superabundancia de vocablos efectivamente abrumadora.

(Continúa en la página siguiente)

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_B}{S_b} &= \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\right)^2 \rightarrow \frac{S_B}{S_b} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \\ \frac{S_B}{S_m} &= \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}}\right)^2 \rightarrow \frac{S_B}{S_m} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A''B''}^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{S_B}{\overline{AB}^2} = \frac{S_b}{\overline{A'B'}^2} = \frac{Sm}{\overline{A''B''}^2}$$

Aplicando la fórmula del prismatoide:

$$V = \frac{H}{6}(S_B + S_b + 4S_m) = \frac{H}{6}\left(S_B + S_b + 4\frac{\overline{A''B''}^2 \cdot S_B}{\overline{AB}^2}\right) =$$

$$= \frac{H}{6}\left[S_B + S_b + 4\frac{\left(\frac{\overline{AB} + \overline{A'B'}}{2}\right)^2 \cdot S_B}{\overline{AB}^2}\right] =$$

$$= \frac{H}{6}\left[S_B + S_b + \frac{\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 + 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB}^2} S_B\right] =$$

$$= \frac{H}{6}\left[S_B + S_b + \left(1 + \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2} + 2\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) S_B\right] =$$

$$= \frac{H}{6}\left[S_B + S_b + S_B + \frac{S_b}{S_B} S_B + 2\sqrt{\frac{S_b}{S_B}} S_B\right] =$$

$$= \frac{H}{6}\left[2S_B + 2S_b + 2\sqrt{S_B \cdot S_b}\right] = \frac{H}{6} 2\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}\right] =$$

$$= \frac{H}{3}(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b})$$

Ej.: Obtener el volumen de una esfera mediante la fórmula del prismatoide.

$S_b = O$

$S_m = \pi R^2$

$S_b = O$

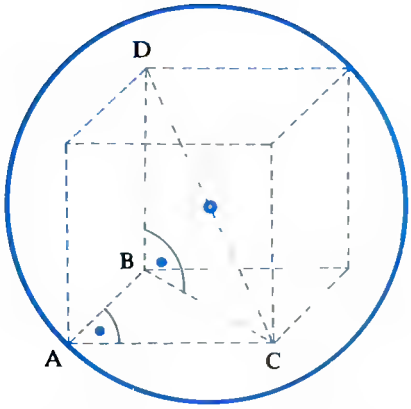
Obsérvese que las bases de una esfera en sus polos son cero, por el motivo de que el cortar por un plano en esos puntos, éste es tangente y no produce sección.

Aplicando la fórmula del prismatoide.

$$V = \frac{H}{6}(S_B + S_b + 4S_m) = \frac{2R}{6}(0 + 0 + 4\pi R^2) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

12.–PROBLEMAS DE RECAPITULACION

Ej.: En una esfera hay inscrito un cubo de arista igual a $6\sqrt{2}$ cm. Paralelo a una de sus caras y a 2,5 cm del centro se traza un plano. Hallar el área de las secciones producidas por el plano en el cubo y en la esfera.

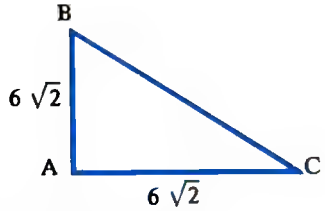


La sección producida en el cubo por el plano es equivalente a cualquiera de las áreas de sus caras laterales, es decir:

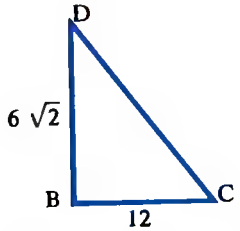
$$S = l^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ cm}^2$$

El cálculo de la sección en la esfera por el plano es más complejo. Inicialmente es interesante obtener el radio de la esfera correspondiente que coincide con la mitad de la diagonal del cubo.

La diagonal del cubo la obtenemos mediante la aplicación de dos teoremas de Pitágoras (uno al triángulo $\widehat{ABC}$ y el otro el triángulo $\widehat{BCD}$).



$$\overline{BC} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{72 + 72} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$



$$\overline{CD} = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 + 72} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \text{ cm}$$

Luego el radio de la esfera es:

$$R = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

Inconscientemente nos resistimos a salir de esta caótica situación creyéndonos que no merece la pena el hacerlo. Debemos darnos cuenta que las generaciones se renuevan y la acelerada evolución del progreso científico exige una simplificación que permita a las nuevas generaciones asimilar rápidamente los conocimientos que les legaron las generaciones precedentes.

Frecuentemente lamentamos la inadecuada preparación con la que los bachilleres acuden a la Universidad. Cuesta trabajo descubrir las causas porque la motivación es compleja; pero examinando el problema en su raíz, se ve que es principalmente de léxico. Se pretende iniciar en poco tiempo a los alumnos de segunda enseñanza en multitud de cuestiones, empleando una terminología confusa que requiere cierto aprendizaje y no se puede improvisar. Sus profesores necesitaron bastante tiempo para conocerla a la perfección. Hacía falta dedicar más tiempo a enseñarla. Mejor sería preocuparse de estudiarla con detenimiento y esmero para mejorarla racionalizando los convencionalismos.

La pedagogía debe progresar a la par de la ciencia para poder seguir de cerca su desenfrenado desarrollo.

El hombre primitivo se había fijado en la fuerza de las aguas.

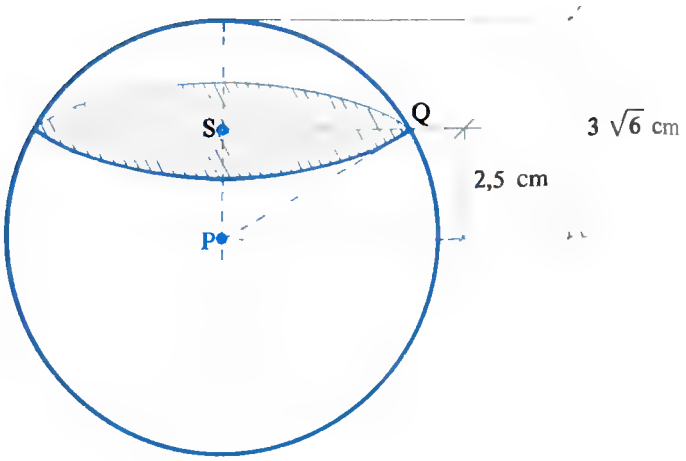
Ante la vista de los ríos, de las cascadas y de sus efectos poderosos, en su cerebro brilló la idea de aprovechar la fuerza del agua que cae.

Pensando e investigando llegó a desarrollar la rueda hidráulica.

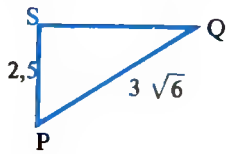
El molino hidráulico es la primera máquina de la antigüedad que liberó al hombre del uso de sus músculos.

Esta aplicación se logró hacia el siglo II antes de Cristo; no se sabe exactamente si fueron los griegos quienes inventaron el molino hidráulico. Como en otros muchos casos, parece ser que procedía del mundo asiático.

El molino hidráulico fue verdaderamente cosa importante para el hombre de la antigüedad, que se hallaba poseído de la necesidad de encontrar algún aparato que le ayudase a transformar las poderosas fuerzas de la naturaleza en movimientos rotativos de pesadas ruedas que molían el grano. Este sistema se emplea todavía en muchas partes del mundo y tiene muchas aplicaciones prácticas.



Para calcular la sección rayada en la figura es necesario obtener el radio del círculo correspondiente mediante la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\widehat{PQS}$:

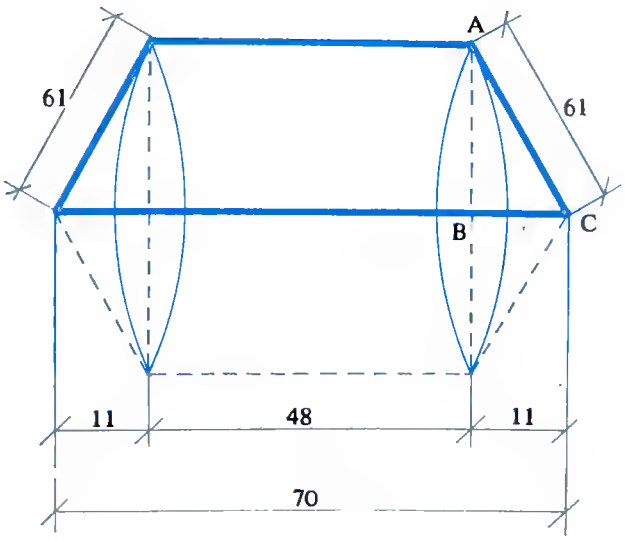


$$\overline{SQ} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{54 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{191}{4}} = \frac{\sqrt{191}}{2} \text{ cm}$$

Luego el área de la sección en la esfera producida por el plano es:

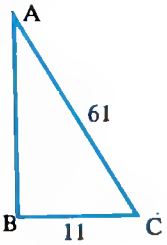
$$S = \pi R^2 = \pi \cdot \overline{SQ}^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{191}}{2}\right)^2 = \frac{191\pi}{4} \text{ cm}^2$$

Ej.: Un trapecio isósceles tiene una base de 48 cm y otra de 7 dm y cada uno de los otros lados mide 61 cm. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por el trapecio al girar 360° alrededor de la base mayor.



Dos conos iguales y un cilindro son las figuras engendradas.

Necesitamos calcular la distancia $\overline{AB}$ en el triángulo rectángulo rayado en la figura $\widehat{ABC}$.



$$\overline{AB} = \sqrt{61^2 - 11^2} = \sqrt{3721 - 121} = \sqrt{3.600} = 60 \text{ cm}$$

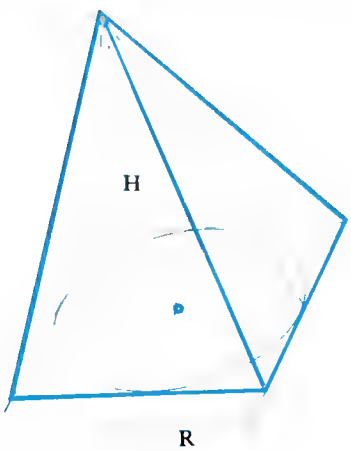
$$V_{cono} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 60^2 \cdot 11}{3} = 13.200\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 60^2 \cdot 48 = 172.800\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{TOTAL} = 2\ V_{cono} + V_{cilindro} = 2 \cdot 132.000\pi + 172.800\pi =$$

$$= 199.200\pi \text{ cm}^3$$

Ej.: Hallar la razón entre el volumen de un cono de revolución y el volumen de la pirámide cuadrangular regular circunscrita al cono.



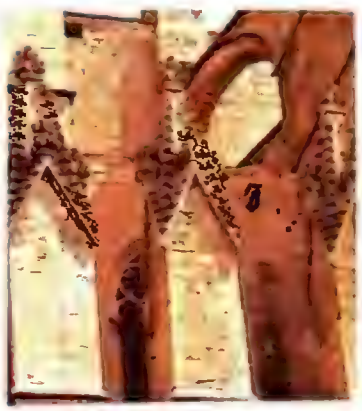
Calculamos el volumen del cono: $V_{cono} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3}$

Calculemos el volumen de la pirámide:

$$V_{pirámide} = \frac{S_B \cdot H}{3} = \frac{(2R)^2 \cdot H}{3} = \frac{4R^2 H}{3}$$

Luego la relación o razón entre ambos es:

$$\frac{V_{cono}}{V_{pirámide}} = \frac{\frac{\pi R^2 H}{3}}{\frac{4R^2 H}{3}} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{V_{cono}}{V_{pirámide}} = \frac{\pi}{4}$$



CAMPEONATO MUNDIAL DE FUTBOL

Un turista belga, cuando venía a España a presenciar los partidos del mundial de fútbol tuvo un accidente grave. Después de cerca de un mes en el Sanatorio y de sufrir varias operaciones, y cuando ya se encontraba en recuperación y totalmente fuera de peligro, quiso enterarse de quién se había proclamado campeón, quién segundo y quién tercero.

El problema era terrible, ya que una de las enfermeras a quien preguntaba, siempre **mentía**; otra de las enfermeras **alternaba** una verdad con una mentira (nunca juntas verdades o mentiras) y la otra siempre decía verdad.

La una contestó:

Campeón: FRANCIA
Segundo: ITALIA
Tercero: ALEMANIA

La otra contestó:

Campeón: FRANCIA
Segundo: ALEMANIA
Tercero: ITALIA

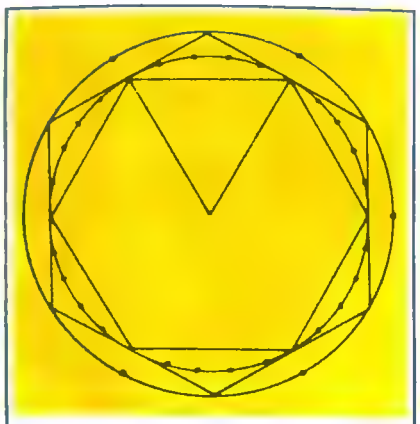
Y la otra dijo:

Campeón: ITALIA
Segundo: ALEMANIA
Tercero: FRANCIA

¡De modo que después de tener el accidente y no ver los partidos, ahora tengo que adivinar quiénes han ganado!

Sin embargo apuntó todas las contestaciones y al cabo de cinco minutos dio las correctas clasificaciones y no como muchos lectores que los sabrán.

LA SOLUCION EN PAGINA 624.



Para la construcción rápida de los más variados modelos de figuras planas, formadas por rectas y segmentos, es de gran eficacia didáctica la utilización de gomas coloreadas, tendidas entre los clavos de una red dispuesta sobre una tabla plana. Tal es el fundamento de los llamados "geoplanos" del profesor Gattegno.

Sa trata de una serie de tablas en las que están clavados clavos que forman distintas redes; cuadrado, pentágono, hexágono, etc.

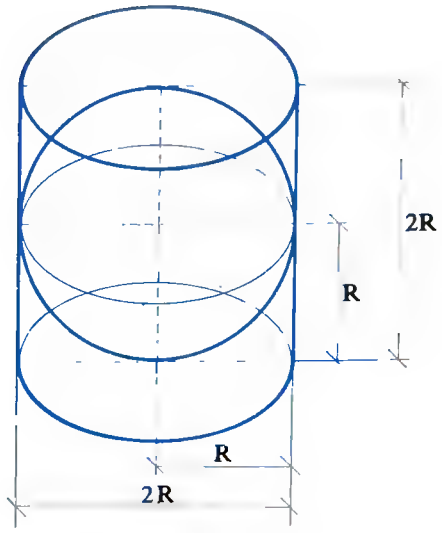
Se ve fácilmente que con ayuda de un solo elástico es posible obtener figuras diversas y que hacen falta varias tablas de redes distintas para que, por ejemplo, puadan dibujarsa los distintos triángulos o polígonos regulares.

Se puede medir la fecundidad de este material por el tiempo que les lleva a hábiles matemáticos a agotar el contenido de cada geoplano; alguno de éstos estuvieron en sus manos durante seis a ocho horas.

Estos geoplanos tienen un atractivo estético indudable y han sido adoptedos con entusiasmo por todos aquellos que los han visto utilizer.

Pueden proporcionar experiencia geométrica ya a niños de cinco años, al mismo tiempo que proponen problemas de forma de dimensión, de simetría, de semejanza, de teoría de grupos, de geometría proyectiva y métrica que hacen de ellos unos instrumentos de trabajo fecundos en todos los niveles de le enseñanza.

Ej.: Probar que la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera es equivalente a la superficie de la esfera.

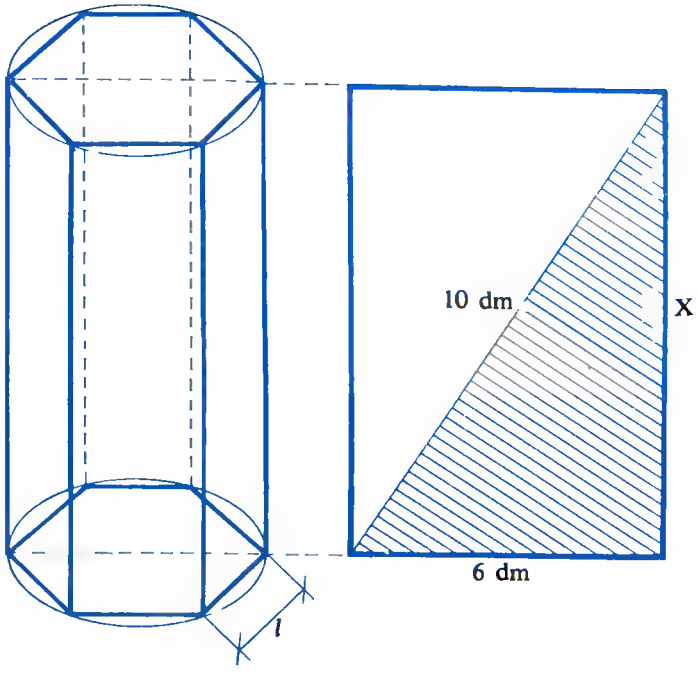


$$Sl_{\text{cilindro}} = 2\pi Rg = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

$$S_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

Efectivamente los resultados son iguales.

Ej.: El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo de 6 dm de base y cuya diagonal mide 10 dm. Averiguar el área lateral del prisma hexagonal regular inscrito en el cilindro.



Para hallar el área lateral del prisma, es necesario conocer su altura (x) y el lado de su base (l).

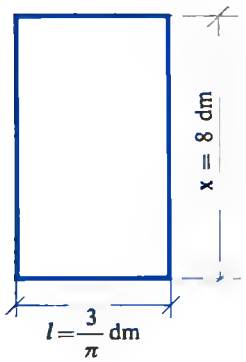
La altura la obtenemos mediante un teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo rayado de la figura (la altura del prisma, es evidente que es la misma que la altura del cilindro).

$$10^2 = x^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 100 - 36 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \sqrt{64} = 8 \text{ dm}$$

Para calcular el lado l de la base exagonal del prisma es necesario hallar el radio de la circunferencia circunscrita a él, que coincide con l. Ahora bien, la longitud de esta circunferencia es 6 dm, luego:

$$L = 2\pi R \rightarrow 6 = 2\pi R \rightarrow R = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \text{dm}$$

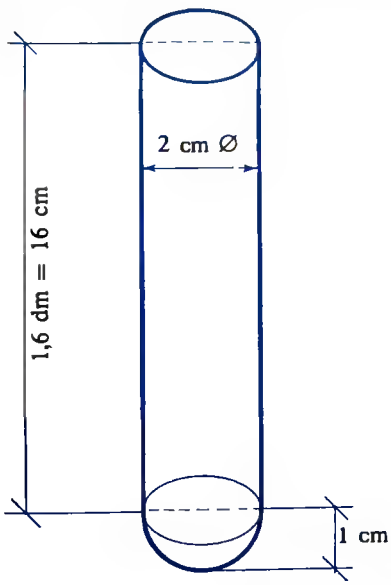
Luego el área lateral del prisma se obtiene hallando el área de una de sus caras y multiplicándola por seis (número de caras laterales que posee el prisma).

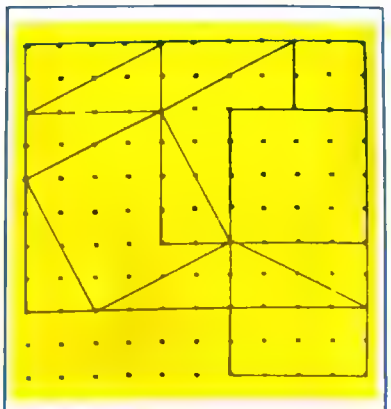


$$S_{cara} = b \cdot h = \frac{3}{\pi} \cdot 8 = \frac{24}{\pi} \text{dm}^2$$

$$Sl = 6 \cdot S_{cara} = 6 \cdot \frac{24}{\pi} = \frac{144}{\pi} \text{dm}^2$$

Ej.: Hallar el menor número de tubos de ensayo necesarios para contener un litro de líquido, si cada uno tiene 2 cm de diámetro, siendo su fondo una semiesfera y la altura total del tubo es de 1,6 dm.





Para construir un geoplano se pueden seguir las siguientes sencillas instrucciones.

1.—**Construir un geoplano circular.**—En una tabla cuadrada de 30 centímetros de lado dibujar un cuadrado de 25 centímetros, su circunferencia inscrita, dividir ésta en 12 partes de modo que cuatro de s[illegible] divisiones coincidan con los puntos de tangencia. Dibújese un hexágono inscrito a esta circunferencia y nuevamente la circunferencia inscrita al hexágono, divídase ésta en 20 partes. Clavar 37 clavos de cabeza dejando que sobresalgan un centímetro, en los 4 vértices del cuadrado, las 12 y las 20 divisiones de la circunferencia y 1 en su centro. Utilizar gomas de colores terminadas en pequeñas anillas para construir figuras sobre el geoplano circular. (Las circunferencias conviene que queden visibles de modo permanente sobre la madera.)

2.—**Construir un gaopleno linaal.** En una tabla cuadrada de 30 centímetros de lado dibujar una cuadrícula de 25 centímetros con cuadrados de 2.5 centímetros de lado. Clavar en cada uno de los 121 vértices de la cuadrícula un clavo de cabeza dejando que sobresalga un centímetro. Utilizar gomas de colores terminadas en pequeñas anillas para construir figuras sobre el geoplano.

$$\begin{array}{r} O\ N\ C\ E \\ +\ \ N\ U\ E\ V\ E \\ \hline V\ E\ I\ N\ T\ E \end{array}$$

V + E + I + N + T + E = 20

Veamos la primera suma. Se ve que V tiene que ser 1 ya que por muy alto que sea N más lo que nos llevemos de O + U no puede jamás exceder de 1. Igualmente se ve por la misma razón que N tiene que ser 9 y E será O (cero) y así tendremos:

$$\begin{array}{r} 0\ 9\ C\ 0 \\ +\ \ 9\ U\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ I\ 9\ T\ 0 \end{array}$$

1 + 0 + I + 9 + T + 0 = 20

Ahora veamos la segunda suma. En ella tenemos:

1 + 0 + 9 + 0 = 10

Como la suma total nos tiene que dar 20, quiere decirse que I + + T = 10 (ya no nos sirven los números 0, 1, 9). Sólo nos sirven 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, y que por parejas sumen 10 (2+8; 3+7 y 4+6).

Veamos la primera suma, 2 + 8. O sea, hacemos I = 2 y T = 8. En el primer sumando, para que T sea 8, C tiene que ser 7. Al ser I = 2, la letra O más la letra U tienen que sumar 12, así haríamos O = 7 y U = 5.

$$\begin{array}{r} 7\ 9\ 7\ 0 \\ 9\ 5\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 2\ 9\ 8\ 0 \end{array}$$

Vemos que no sirve, ya que se repite el n.º 7. Lo mismo nos ocurriría con 4 + 6.

O sea, que nos sirven solamente el 3 + 7 = 10 y así tenemos, y para abreviar:

$$\begin{array}{r} 8\ 9\ 6\ 0 \\ 9\ 5\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 9\ 7\ 0 \end{array}$$

y → 1 + 0 + 3 + 9 + 7 + 0 = 20

Y también

$$\begin{array}{r} 5\ 9\ 6\ 0 \\ 9\ 8\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 9\ 7\ 0 \end{array}$$

Lo más importante es conocer el volumen o capacidad de cada tubo.

$$V_{cilindro} = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 1^2 \cdot 16 = 16\pi \simeq 50{,}24\ cm^3$$

$$V_{semiesfera} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} = \frac{4\pi R^3}{6} = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \simeq 2{,}09\ cm^3$$

$$V_{total} = V_{cilindro} + V_{semiesfera} = 50{,}24 + 2{,}09 \simeq 52{,}33\ cm^3 \simeq$$

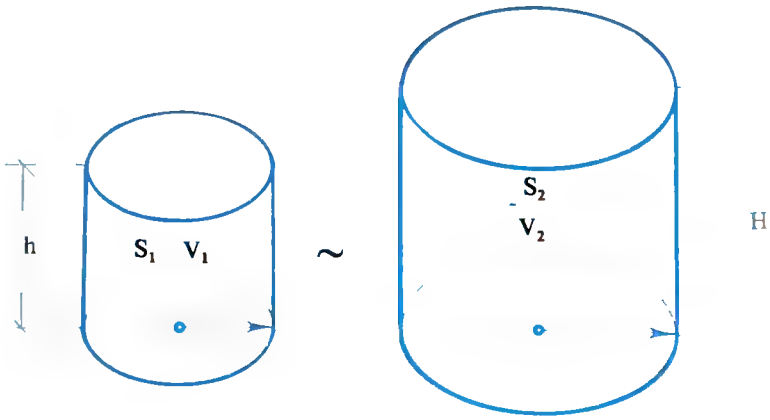
$$\simeq 0{,}05233\ dm^3 = 0{,}05233 \text{ litros}$$

Haciendo una sencilla regla de tres obtenemos el número de tubos necesarios para 1 litro de líquido.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ tubo} \quad \underline{\text{contiene}} \quad 0{,}05233 \text{ litros} \\ x \text{ tubos} \quad \text{———} \quad 1 \text{ litro} \end{array}\right\} \quad x = \frac{1 \cdot 1}{0{,}05233} = 19{,}10 \text{ tubos}$$

Es decir, necesitamos: 20 tubos de ensayo.

Ej.: Sabiendo que la razón de las áreas laterales de dos cilindros semejantes es de 4/9. ¿Cuál será la razón de sus volúmenes?



En dos figuras semejantes la razón de las áreas de ambos es igual al cuadrado de la razón de semejanza, y la razón entre dos longitudes cualquiera es igual a la razón de semejanza.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} = K^2 \rightarrow K = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{h}{H} = \frac{2}{3} \\ \\ \frac{r}{R} = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 H} = \frac{r^2 \cdot h}{R^2 \cdot H} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \frac{h}{H} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$$

TEMA 23

PROGRESIONES ARITMETICAS

INDICE

1.–INTRODUCCION.
2.–CONCEPTO DE PROGRESION ARITMETICA.
3.–CALCULO DEL TERMINO N-SIMO O GENERAL DE UNA PROGRESION ARITMETICA.
4.–INTERPOLACION ARITMETICA.
5.–SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION ARITMETICA.
6.–PROGRESIONES ARITMETICAS DE NUMERO DE TERMINOS IMPAR, TERMINO CENTRAL.
7.–LAS PROGRESIONES ARITMETICAS Y LOS CONJUNTOS.

TEMA 23

CURIOSIDAD ARITMETICA

El 142.857 es un número particularmente extraño. Si se le multiplica por dos el resultado es 285.714, esto es, los mismos números qua componen la cifra anterior pero en orden diferente. Igual fanómeno ocurre cuando se le multiplica por 3, por 4 y por 5, pues los resultados son: 428.571, 571.428 y 714.285, raspectivamente. Cuando se le multiplica por 6, el resultado es el número inicial invartidos los grupos da tres cifras, que lo componen así: 857.142; y, finalmente, si se le multiplica por 7 da por resultado esta hermosa cifra: 999.999.

PROGRESIONES ARITMETICAS

1.–INTRODUCCION

Cualquier conjunto de números reales se dice que forma una sucesión cuando existe un criterio tal, que permita una ordenación de dichos números. Cada uno de los números en cuestión se les denomina términos de la sucesión y al n-simo, término general.

La ley o criterio mediante la cual se produce la ordenación de los elementos de una sucesión es en general de carácter muy variado, aunque los tipos que se van a estudiar seguidamente sean de tipo particular (progresiones aritméticas y geométrica). Según la cantidad de términos que tenga una sucesión, ésta se divide en **limitada o finita** (cierta cantidad de términos) o **ilimitada o indefinida** (infinitos términos).

NOTA.–Se omite en este capitulo un estudio profundo del concepto de sucesión por ir acoplado en un tema posterior.

Ej.: Es clásica la sucesión de Fibonacci, que partiendo de los números 0 y 1 define otro cualquiera como la suma de los dos anteriores.

Su forma es: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

2.–CONCEPTO DE PROGRESION ARITMETICA

Se entiende por progresión aritmética a una sucesión de números, tales que uno cualquiera de ellos se obtiene sumándole al anterior una constante fija, llamada **razón o diferencia** de la progresión (d).

Las progresiones aritméticas se clasifican en dos grandes grupos:

Crecientes. Cuando un término cualquiera es mayor que el anterior.

En estos casos la razón de la progresión es siempre mayor que cero ($d > 0$).

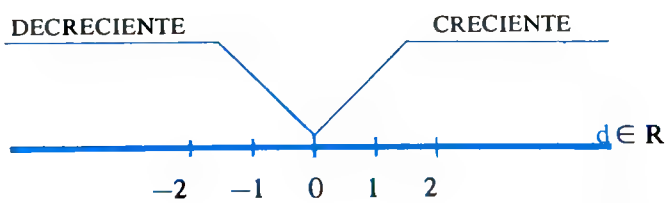
Ej.: La progresión: 2, 5, 8, 11, ... es creciente ($D = 3 > 0$).

Decrecientes. Cuando un término cualquiera es menor que el anterior.

En estos casos la razón de la progresión es siempre menor que cero ($d < 0$).

Ej.: La progresión: 7, 5, 3, ... es decreciente ($d = -2 < 0$).

Gráficamente, si consideramos un eje horizontal donde se encuentren todos los valores reales posibles para la razón d, la clasificación queda expuesta de la siguiente forma:



NOTA.–Es usual utilizar el simbolo $\div$ para indicar que una sucesión es progresión aritmética.

Es general también el simbolizar los términos de una progresión con la letra "a" y un subíndice que indique el lugar que ocupa el término en la progresión.

Así, teóricamente se puede simbolizar una progresión con la forma

$$\div\ a_1, a_2, a_3, a_4; \ldots\ldots a_n \ldots.$$

En donde el término a_n representa el término n-simo o general de la progresión. Si la progresión aritmética es limitada, el término a_n representará al último de la progresión (cuestión frecuente en los problemas de progresiones).

Si por el contrario la progresión aritmética es ilimitada, el término a_n será el que intente representar a todo el conjunto de términos de la progresión.

Tarragona posee monumentos que atestiguan su antiquísimo origen. Sus famosas murallas, en una longitud de más de un kilómetro, circundan desde hace 2.500 años la parte más elevada de la ciudad. Son de construcción ibérica en su parte inferior (siglo VI a V antes de Cristo) y romana en la superior; esta parte construida por los Escipiones en las guerras púnicas.

Cayo, Julio César, Octavio Augusto y Adriano estuvieron en ella. Era la ciudad romana más importante de España.

Tarragona fue evangelizada por el apóstol San Pablo. Hacia el año 400 fue destruida en la primera incursión de los bárbaros, y en el año 476 fue conquistada por los ejércitos visigodos de Eurico.

Durante los años 700 fue nuevamente destruida y conquistada por los árabes.

En el siglo XII fue definitivamente reconquistada por Ramón Berenguer III –Conde de Barcelona–, siendo restaurada hacia 1116 por el obispo San Olegario que se estableció en ella.

A pesar de su vida, varias veces milenaria, la ciudad sigue llena de vigor y belleza. Conserva en sus cercanías importantes obras romanas: el acueducto de las Ferreras, el arco de Bará y la torre de los Escipiones.

Se cree que la palabra Alá o Allah, viene de la voz aramea Alaha, Dios.

En la Arabia preislámica tenían la noción más o menos precisa de un dios todopoderoso y supremo.

En el Corán, su texto es la palabra de Alá, que ha sido revelada a los hombres. Es el bienhechor enseñando a predicar. El enseña a quien ignora; Mahoma sólo habla en nombre de Dios, clemente y misericordioso, creador de todas las cosas, árbitro supremo de su creación, el cual en la hora del juicio final separará a los elegidos de los réprobos. Uno y único, que ni ha sido engendrado ni engendra. Misericordioso, que con su benevolencia todo lo perdona. Refugio de sus creyentes, manifestando también su cólera contra los que rechazan sus bienes.

Los creyentes en sus oraciones recitan los 99 nombres más hermosos, dejando para el final el nombre más hermoso de todos, "ALÁ".

Alá lo ve todo, lo sabe todo, siendo el reflejo de su fuerza creadora el universo.

Toda su doctrina y comportamiento humano está revelado en el Corán.

Ej.: Formar una progresión aritmética de ocho términos, sabiendo que $a_1 = 2$ y $d = 5$ le vamos sumando a cada término 5 y obtenemos el siguiente (empezando por el primero, 2).

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37$$

Ej.: Formar una progresión aritmética de tres términos sabiendo que

$$A_1 = 3x - 8 \text{ y } d = x + 1$$

La progresión se obtiene pues sumándole $d = x + 1$ a cada término empezando por el primero.

$$a_1 = 3x - 8$$
$$a_2 = 3x - 8 + x + 1 = 4x - 7$$
$$a_3 = 4x - 7 + x + 1 = 5x - 6$$

Ej.: Comprobar que las expresiones

$$\frac{1+a}{1+b}, \frac{a+b}{2b}, \frac{a+b^2}{b+b^2}$$

forman progresión aritmética.

Para ver si forman progresión aritmética es evidente que la razón o diferencia debe ser igual entre cada dos términos consecutivos.

$$\frac{1+a}{1+b} + d = \frac{a+b}{2b} \rightarrow d = \frac{1+a}{1+b} - \frac{a+b}{2b} =$$

$$= \frac{(1+a)(2b) - (a+b)(1+b)}{(1+b)(2b)} = \frac{2b + 2ab - a - ab - b - b^2}{2b + 2b^2} =$$

$$= \frac{b + ab - a - b^2}{2b + 2b^2}$$

por otra parte

$$\frac{a+b}{2b} + d = \frac{a+b^2}{b+b^2} \rightarrow d = \frac{a+b}{2b} - \frac{a+b^2}{b+b^2} =$$

$$= \frac{(a+b)(b+b^2) - (a+b^2)(2b)}{(2b)(b+b^2)} = \frac{ab + ab^2 + b^2 + b^3 - 2ab - 2b^3}{2b^2 + 2b^3} =$$

$$= \frac{-ab + ab^2 + b^2 - b^3}{2b^2 + 2b^3} = \frac{-a + ab + b - b^2}{2b + 2b^2}$$

Efectivamente, las razones obtenidas entre cada dos términos consecutivos son iguales luego forman progresión aritmética.

Ej.: Sabiendo que el último término de una progresión aritmética de seis términos es 360 y la razón es 20. Averiguar cuál es la progresión.

Téngase en cuenta que cuando queremos hallar un término de una progresión aritmética a partir del anterior, habrá que sumar a éste la razón, pero cuando queramos hallar un término de una progresión aritmética a partir del siguiente, habrá que restar a éste la razón.

Así, en la progresión propuesta

$$a_6 = 360$$
$$a_5 = 340$$
$$a_4 = 320$$
$$a_3 = 300$$
$$a_2 = 280$$
$$a_1 = 260$$

La progresión es pues:

260, 280, 300, 320, 340, 360

3.–CALCULO DEL TERMINO N-SIMO O GENERAL DE UNA PROGRESION ARITMETICA

Se entiende por término general de una progresión aritmética a aquel que tiene capacidad para reproducir cualquier término de la progresión.

Veamos: para deducirlo vamos a partir de la progresión aritmética.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

y vamos a ir exponiendo todos los términos de ella en función del primero y de la razón.

$$a_1 = \underline{a_1 + 0 \cdot d}$$

$$a_2 = \underline{a_1 + 1d}$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = \underline{a_1 + 2d}$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = \underline{a_1 + 3d}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)\, d}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DEL TENIS DE LA PAGINA 579.

Primero: vemos que todos los partidos se juegan al límite de 6 juegos.

Segundo: vemos que tuvo que jugarse un quinto y definitivo partido.

Tercero: de los cuatro partidos anteriores, 2 los ganaron cada uno de los participantes, importándonos muy poco, para el caso, el orden de estas victorias.

Podíamos plantearlo así, por ejemplo:

A		B
6	.....	x
x	.....	6
x	.....	6
6	.....	x
6	.....	x
1B+2x		12+3x

El equipo A tiene que tener 1B juegos más 2x juegos. El equipo B tiene que tener 12 juegos más 3x juegos. Si a x le damos un valor igual a 1 entonces el equipo A habría realizado 20 juegos y como la diferencia a favor del jugador B son 6 juegos, entonces este jugador habría realizado 26 juegos y 26 – 1 = 14, o sea, que 3y sería igual a 14, y como la y tiene que ser obligatoriamente igual o menor que 4 vemos que es imposible que x sea igual o superior a 1, o sea, que x sea CERO e y sea CUATRO. Así tendríamos:

A		B
6	.....	4
0	.....	6
0	.....	6
6	.....	4
6	.....	4
18	.....	24

SEIS juegos más para el perdedor.

SOLUCION A LA DESPEDIDA DE LAS FAMILIAS DE LA PAGINA 585.

Vamos a ver primeramente cuántos hombres componían las familias.

Al existir 27 apretones de manos y al no existir en ninguna familia 1 hombre solo como se indicó, tiene que ser: $27 = 9 \times 3$, ya que sólo puede el número 27 ser solamente múltiplo de 3 y de 9.

Entonces ya tenemos que en una familia hay 9 hombres y en la otra 3.

Ahora vamos a calcular las mujeres:

Como hemos dicho en el enunciado que no existía en ninguna de de las familias 1 solo hombre o una sola mujer, vamos a calcular a partir de 2 mujeres cada familia, para que existan 33 besos de despedida y calculemos, llamando H a los hombres y M a las mujeres:

H		M
9	(a)	2
3	(b)	2

Besos serían:

$2 \times 2 + 2 \times 9 + 2 \times 3 = 27$ besos. No nos sirve este resultado por defecto.

Calculemos ahora 3 mujeres en cada familia:

H		M
9	(a)	3
3	(c)	3

Besos serían:

$3 \times 3 + 3 \times 9 + 3 \times 3 = 45$ besos. No nos sirve este resultado por exceso.

Calculemos ahora 3 mujeres en una familia y 2 en la otra:

H		M
9	(a)	3
3	(b)	2

Besos serían:

$2 \times 3 + 2 \times 9 + 2 \times 3 = 33$ **besos.** SOLUCION CORRECTA.

Estudiando la ley de formación que siguen los términos, obsérvese que en todos los términos aparece el a_1 (también deberá aparecer en el general) y también en todos aparece la razón d multiplicada por una unidad menos del lugar que ocupa el término (también ocurrirá en el general).

NOTA.—Téngase en cuenta para los problemas de progresiones que suele ser muy interesante, para resolver muchos de ellos, el poner los términos en función del primero y de la razón, ya que teniendo a_1 y d conseguiremos cualquier otra cosa de una progresión.

Ej.: Averiguar cuál es el valor del término que ocupa el lugar 30 de la progresión aritmética: 2, 5, 8, ...

Lo que nos piden en realidad es calcular el término a_{30}, luego consideramos los 30 primeros términos de la progresión haciéndola limitada y siendo a_{30} el último.

Pues bien, aplicando la fórmula del término general $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$, y teniendo en cuenta que conocemos $a_1 = 2$; $n = 30$ y $d = 3$, obtenemos el a_{30}. Es decir:

$$a_{30} = 2 + (30 - 1)\, 3 = 2 + 29 \cdot 3 = 2 + 87 = 89$$

Ej.: Hallar el término general de la progresión aritmética 4, 6, 8, ... La progresión ahora tomará la consideración de ilimitada.

El término general es, pues:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \rightarrow a_n = 4 + (n - 1)\, 2$$

$$a_n = 4 + 2n - 2 \rightarrow a_n = 2 + 2n$$

Es decir, que la progresión quedaría así:

$$4, 6, 8, \ldots 2 + 2n \ldots$$

Obsérvese cómo el término general $2 + 2n$ tiene aptitud para reproducir cualquier término de la progresión, sin más que particularizar n para cualquier lugar ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

Para $n = 1$ (Primer término) $\rightarrow a_1 = 4$

Para $n = 2$ (Segundo término) $\rightarrow a_2 = 6$

Para $n = 3$ (Tercer término) $\rightarrow a_3 = 8$

Ej. Calcular el término que ocupa el lugar cincuenta en la progresión formada por los múltiplos de dos.

La progresión es de la forma: 2, 4, 6, 8, ..., y es aritmética de razón $d = 2$.

El término 50 aplicando la fórmula del término general es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \rightarrow a_{50} = 2 + (50 - 1)\, 2 = 100$$

Ej.: Hallar la diferencia de una progresión aritmética conociendo los términos

$$a_1 = 23 \text{ y } a_{17} = 31$$

La razón o diferencia relaciona evidentemente los términos a_1 y a_{17}:

$$a_{17} = a_1 + 16\,d$$

Sustituyendo:

$$31 = 23 + 16d \to 8 = 16d \to d = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{1}{2}$$

Ej.: Hallar la razón de una progresión aritmética conociendo los términos $a_5 = -10$ y $a_{13} = -8$.

Los términos a_5 y a_{13} estarán relacionados por la razon d. Vamos pues a localizar tal relación.

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \to a_1 = a_5 - 4d \\ a_{13} = a_1 + 12d \to a_1 = a_{13} - 12d \end{array}\right\} a_5 - 4d = a_{13} - 12d$$

Operando resulta:

$$-4d + 12d = a_{13} - a_5 \to 8d = a_{13} - a_5$$

$$d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$$

Sustituyendo los datos en $d = \frac{a_{13} - a_5}{8}$

$$d = \frac{-8 - (-10)}{8} = \frac{-8 + 10}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad d = \frac{1}{4}$$

Ej.: Formar la progresión aritmética que tiene por datos:

$$a_1 = 2\sqrt{a} \quad \text{y} \quad d = 3\sqrt{a}$$

Sumándole al primero la razón, y así sucesivamente, obtenemos la progresión pedida.

$$2\sqrt{a},\ 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a},\ 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} + 3\sqrt{a},\ \ldots =$$

$$= 2\sqrt{a},\ 5\sqrt{a},\ 8\sqrt{a},\ \ldots$$

El origen de las barajas o cartas de juego se sitúa en el oriente: chinos, persas e indios se disputan su invención.

Se cree que desde allí se transmitió a los árabes y éstos las introdujeron en Europe a través de España.

Lo cierto es que en el s. XIV, hacia 1375, tuvieron gran auge en Viterbo (Italia), donde se confeccionaban en plen artesano verdaderas obras de arte.

Un juego de cartas valía tanto como un dije o un camafeo y se hacía constar en la relación de bienes de un gran señor o de un príncipe.

Al descubrirse al grabado sobre madera y posteriormente sobre metal, la fabricación de naipes se extendió y vulgarizó.

Las barajas da aquella época ostentaban hojas, flores, cascabeles, bellotas, cabezas de animales; sin embargo fue España la inventora de los signos que aún hoy perduran: copas, oros, espadas y bastos.

Hasta 1855 las cartas eran de papel y resultaban blandas y transparentes.

Se cree que en torno a la baraja se han desarrollado 110 juegos diferentes, casi todos procedentes de la Edad Media.

Para algunos, los naipes encierran enseñanzas sagradas supremas; influyen en las personas y muestran al porvenir.

Pesa a estos valores cartománticos, se usan mayormente para jugar y sirven de distracción para todas las edades.

Astrónomos chinos ya estaban estudiando sin telescopio las manchas solares en el año doscientos de nuestra Era.

Pero no se suscitó verdadero interés por ellas hasta que Galileo en 1610 dirigió su primer telescopio hacia el astro rey y demostró que eran trozos oscuros de la superficie misma del Sol y no sombras proyectadas por otros cuerpos.

Schwabe, un botánico alemán, estudió sistemáticamente durante medio siglo estas manchas. Examinaba el Sol todos los días con su telescopio y se fijaba en el tamaño, el aspecto y la posición de todas las manchas visibles en la superficie. Determinó la existencia de un ritmo en le variación del área ocupada por ellas alcanzando un máximo por término medio ceda veintidós años.

Durante los años de actividad máxima, se nota en la Tierra de diversas maneras: se evapora más agua de mar y la lluvia es muy intensa en algunas partes del globo; de los casquetes polares se desprenden trozos de hielo que navegan a la deriva.

Este ciclo rítmico de las manchas solares deja su señal en el tronco de los árboles. Cada veintidós años los anillos de crecimiento son más pronunciados. Una mancha solar fotografiada recientemente cubría un área de 15.000.000 de Km cuadradoa; eato da idea de sus grandes dimensiones.

4.—INTERPOLACION ARITMETICA

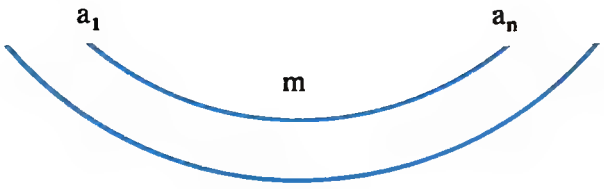
Interpolar consiste en colocar una cierta cantidad de términos entre dos extremos fijos y dados.

En cualquier caso los términos a interpolar junto con los dos extremos tienen que formar progresión aritmética.

Pues, bien, es obvio que el problema de una interpolación aritmética consiste en calcular la razón de la progresión, ya que teniendo la razón, al primero que es dato le sumamos la razón y obtenemos el siguiente y así sucesivamente.

El cálculo de la razón aplicado a un problema de interpolación se calcula aplicando la fórmula del término general sin más que considerar $n = m + 2$ (n = número total de términos de la progresión y m = número de términos que tenemos que interpolar).

Pues bien, a los términos m que queremos interpolar se les denomina **medios diferenciales o aritméticos.**



$$n = m + 2$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d \rightarrow a_n = a_1 + (m + 2 - 1)\,d$$

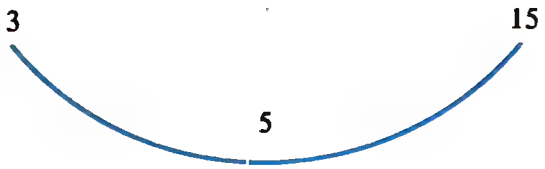
$$a_n = a_1 + (m + 1)\,d \rightarrow a_n - a_1 = (m + 1)\,d$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

NOTA.—Obsérvese que hemos obtenido una fórmula que permite resolver el problema de la interpolación aritmética en función de la cantidad de términos m que queremos interpolar.

Sin embargo, considérese que partiendo de la fórmula del término general también se resuelve el problema teniendo en cuenta que hay que sustituir n por la cantidad de términos que queremos interpolar más los dos extremos.

Ej.: Interpolar cinco medios diferenciales entre 3 y 15.



Vamos a realizar el problema, sin aplicar la fórmula de la interpolación, es decir, aplicando la del término general, teniendo en cuenta que $n = 5 + 2 = 7$ términos en total.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \rightarrow 15 = 3 + (7 - 1)\, d$$

$$12 = 6d \rightarrow d = 2$$

Luego la progresión pedida es

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

Ej.: Interpolar cinco medios diferenciales entre -51 y -27.

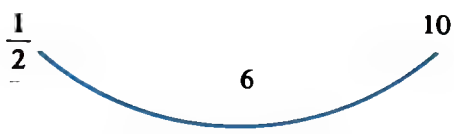
Aplicando la fórmula de la interpolación se obtiene:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} \rightarrow d = \frac{-27 - (-51)}{5 + 1} = \frac{-27 + 51}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

La progresión es pues:

$$-51, -47, -43, -39, -35, -31, -27$$

Ej.: Interpolar seis medios aritméticos entre 1/2 y 10.



Aplicando la fórmula de la interpolación:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} \rightarrow d = \frac{10 - 1/2}{6 + 1} = \frac{19/2}{7} = \frac{19}{14}$$

La progresión es pues

$$\frac{1}{2}, \frac{13}{7}, \frac{45}{14}, \frac{32}{7}, \frac{83}{14}, \frac{51}{7}, \frac{121}{14}, 10.$$

Ej.: Interpolar cinco medios diferenciales entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$.

La abeja es admirable, pero en le colmena; fuera de ella no es más que una mosca.

Voltaire

¡Las fuerzas humanas tienen un límite!... Sí; un límite que es preciso sobrepasar siempre.

Guynemer

Sólo son compañeros los que ven atados a la misme cuerde, para ascender al mismo pico.

Saint-Exupéry

El buen gusto es el sentido común del genio.

Chataaubriand

Los frecesados son los únicos que tienen verdadera experiancia, pero nunca se les interroga.

Cesbron

Los creadores no son necesariamente de una inteligencia superior a los demás; son de otra naturaleza.

Bernard Grasset

La experiencia no es lo que le ha sucedido a un hombre; es lo que un hombre hace con lo que le ha sucedido.

Aldous Huxley

Aplicando la fórmula de la interpolación:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m+1} \rightarrow d = \frac{\sqrt{27} - \sqrt{3}}{5+1} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la progresión es

$$\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3}, \frac{7\sqrt{3}}{3}, \frac{8\sqrt{3}}{3}, \sqrt{27}$$

5.–SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION ARITMETICA

Consiste en calcular la suma de todos los términos de una progresión aritmética; para ello, vamos a expresar la suma de los términos de una progresión aritmética en función del primer término y de la razón y a continuación expresaremos también esta misma suma pero con todos sus términos simétricamente invertidos para a continuación sumar estas dos expresiones miembro a miembro y obtener el valor S de la suma.

Partiendo de la expresión base:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Se obtiene:

$$S = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots\ldots + a_n - 2d + a_n - d + a_n$$

$$S = a_n + a_n - d + a_n - 2d + \ldots\ldots + a_1 + 2d + a_1 + d + a_1$$

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

La sardana es un baila típico y fascinante, extendido hoy por toda Cataluña. Es una suave expresión coreográfica que se bailaba inicialmente en unas cuantas comarcas de Gerona y que en los últimos tiempos se ha hecho lá danza popular catalana, cuyos pasos y acordes se ensayan ya en medio mundo.

En ruedos separados, dos grupos, de hombres y mujeres unidos de la mano, en cadena, se mueven suavemente cambiando de paso cada cierto tiempo, trenzándolos con los pies al compás de una música uniforme con fuertes altos y bajos.

La sardana es toda moderación, severidad casi solemne, parece expresar reverencia por lo que no se ve.

Constituye un vivo esparcimiento para el que la baila y para el que la observa. Es danza del pueblo tolerante, e iguala a todos. En ella, el que quiera, puede incorporerse en cualquier momento; no hay bailarines principales, todos son iguales; aquí nadie quiere sobresalir.

Es la danza colectiva por excelencia y acaso por eso tiene tanto éxito.

Manos unidas y a veces levantadas son un símbolo para que nadie se aparte de esa comunidad perfecta.

La sardana tiene un remoto abolengo casi prehistórico. Parece que vino de la isla de Cerdeña en uno de esos flujoa y reflujos de razaa, pueblos, ejércitos y dinastlas de la Europa en formación.

Se afincó en la Cerdaña, una

(Continúa en la página siguiente)

Obsérvese que si en una progresión aritmética empezamos por el primer término, habrá que sumarle a éste la razón para obtener el segundo término y así sucesivamente; pero si empezamos por el último habrá que restarle a éste la razón para obtener el antepenúltimo y así sucesivamente.

Obsérvese también que al sumar miembro a miembro las dos expresiones anteriores se han obtenido sumandos iguales $a_1 + a_n$, pues bien, si existen n términos en la progresión también existirían n sumandos de la forma $a_1 + a_n$, así que los podremos agrupar multiplicando uno de ellos por el número de los que existen n. Es decir, que la expresión adopta la forma

$$2S = (a_1 + a_n)\, n \quad \rightarrow \quad \boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Expresión que reproduce la suma de cualquier cantidad de términos de una progresión aritmética.

Ej.: Hallar la suma de los 20 primeros términos de la progresión 3, 6, 9, ... Aplicando la fórmula de la suma:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n \rightarrow S = \frac{3 + a_{20}}{2} \cdot 20$$

Se observa que se desconoce el último término a_{20}, término que calcularemos por la fórmula del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d \rightarrow a_{20} = 3 + (20 - 1)\, 3 = 60$$

Volviendo a la expresión inicial de la suma y sustituyendo en ésta el a_{20} se obtiene

$$S = \frac{3 + 60}{2} \cdot 20 = 630$$

Ej.: Hallar la suma de los n primeros números naturales.

La progresión es de la forma

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots \quad n, \ldots\ldots$$

Aplicando la fórmula de la suma obtendremos:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n \rightarrow S = \frac{1 + a_1 + (n - 1)\, d}{2} \cdot n$$

$$S = \frac{1 + 1 + (n - 1)\, 1}{2}\, n \rightarrow S = \frac{2 + n - 1}{2}\, n = \frac{1 + n}{2}\, n$$

$$S = \frac{n + n^2}{2}$$

zona Pirenaica que en parte se confunde con el legendario Rosellón de los caballeros andantes.

Los griegos la useban para el culto e la diosa Ceres, petrona de la Agricultura, y se bailaba por todos los labradores en la misma "era" cuando finalizaban la trilla dal trigo.

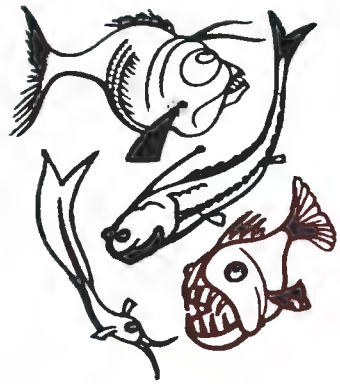
Lo que se sabe de cierto es que la sardana tuvo su arraigo en Gerona.

En la Edad Media anduvo mezclada con los juglares y las fiestas de corte, y poco ha variado hasta hoy dia.

Existe la del Ampurdán y la de Selva, la larga y la corta; pero las diferencias son pequeñas.

Antiguamente las coblas y orquestas que acompañaban a los danzantes usaban la cornamusa, instrumento musical pariente cercano de la gaita escocesa, y asimismo la sardana tiene mucho de algunas danzas folklóricas de la vieja Escocia.

Sea como fuere, con la sardana habla en música y danza una raza fuerte, acogedora, rítmica y sentimental que sabe unir el trabajo y la alegría.



EL ESPACIO ABISAL

A las profundidades oceánicas, donde no llega a penetrar la luz del Sol, se le llama ESPACIO ABISAL o ABISMAL.

Los espacios abisales han sido (de hecho, siguen siendo) la gran preocupación de los oceanógrafos de las naciones más desarrolladas.

A partir de los 400 ó 500 m. de profundidad, las aguas aparecen tranquilas, con una misma temperatura y salinidad, y, al no llegar la luz, falta también la vegetación.

Es un medio poco poblado, y debido a la inexistencia de vegetación el fondo es lodoso y con abundantes cadáveres de la superficie.

Los animales que habitan en este medio disponen de unas mandíbulas muy desarrolladas y unos dientes largos afilados, viviendo, por supuesto, de los cadáveres de sus congáneres.

Suelen ser animales de color oscuro (negros, rojos y morados). Abdomen muy dilatado.

La mayoría de estos animales tienen los ojos parcial o totalmente atrofiados adaptándose a la falta de luz por medio de apándices largos que quizás en algunos les sirva de antenes. Sus esqueletoa están poco calcificados.

Ej.: Hallar la suma de los 30 primeros números pares.

La progresión es de la forma

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ldots$$

La suma es pues:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n \rightarrow S = \frac{2 + a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot 30$$

$$S = \frac{2 + 2 + (30-1)\,2}{2}\ 30 = 930$$

Ej. Hallar la suma de los 40 primeros múltiplos de nueve.

La progresión es de la forma

$$9,\ 18,\ 27,\ \ldots\ldots$$

La suma es pues

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n \rightarrow S = \frac{9 + a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot 40$$

$$S = \frac{9 + 9 + (40-1)\,9}{2} \cdot 40 = 7.380$$

Ej.: Hallar la suma de los múltiplos de cuatro comprendidos entre 33 y 666. La progresión es de la forma:

$$4,\ 8,\ 12,\ \ldots\ldots$$

Sin embargo, para hallar la suma necesitamos calcular la cantidad de términos n que hay que considerar. Este asunto lo calculamos aplicando la fórmula del término general.

Pero teniendo en cuenta que 33 y 666 no son ninguno múltiplo de 4, habrá que buscar por encima de 33 y por debajo de 666 los múltiplos de 4 más próximos que sí serán elementos que pertenezcan a la progresión aritmética del problema (4, 8, 12, ……) y éstos son: 36 y 664. Es decir, que la progresión realmente es de la forma: 36, 40, 44, …… 664.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \rightarrow 664 = 36 + (n-1)\,4 \rightarrow 628 = 4n - 4$$

$$632 = 4n \rightarrow n = 158$$

Así que la suma es:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S = \frac{36 + 664}{2} \cdot 158 = 55.300$$

Ej.: Hallar la suma de todos los números pares de tres cifras.

La progresión aritmética que se forma es:

$$100,\ 102,\ 104,\ \ldots\ldots\ 998$$

Su suma es, pues:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S = \frac{100 + 998}{2} \cdot n$$

Obsérvese que desconocemos la cantidad de términos n que hemos de considerar, asunto que resolveremos aplicando la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\ d \rightarrow 998 = 100 + (n - 1)\ 2$$

$$898 = 2n - 2 \rightarrow 900 = 2n \rightarrow n = 450$$

Sustituyendo en la expresión de la suma se obtienen:

$$S = \frac{100 + 998}{2} \cdot 450 = 247.050$$

Ej.: En una progresión aritmética el término primero y segundo suman -51 y el tercero y cuarto suman 9. Forman la progresión.

En cuanto tengamos el primer término y la razón, ya estaremos en disposición de formar la progresión, luego éste va a ser nuestro objetivo: el cálculo de a_1 y d.

Inicialmente vamos a formalizar las condiciones que indica el problema:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= -51 \\ a_3 + a_4 &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Y como ya se ha dicho en la teoría, es conveniente poner todos los términos en función del primero, y de la razón con lo que conseguiremos un sistema de ecuaciones que nos proporcionará a_1 y d. Veamos:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1 + d &= -51 \\ a_1 + 2d + a_1 + 3d &= 9 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2a_1 + d &= -51 \\ 2a_1 + 5d &= 9 \end{aligned}\right\} \rightarrow d = -51 - 2a_1$$

$$2a_1 + 5(-51 - 2a_1) = 9 \rightarrow 2a_1 - 255 - 10a_1 = 9$$

$$-8a_1 = 264 \rightarrow a_1 = \frac{264}{-8} = -33$$

para $a_1 = -33 \rightarrow d = -51 - 2(-33) = 15$

Buscar un número de dos cifras y que esta cifra sea igual al cuadrado de las unidades.

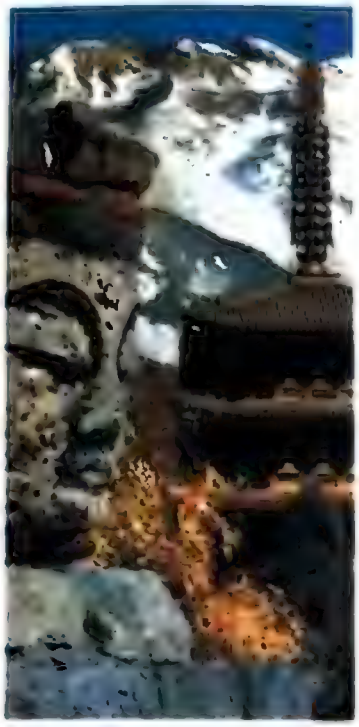
Nota.—Este problema sí hay que solucionarlo sin escribir. Hazlo de memoria.

Vamos a pensar juntos.

Del cero al nueve. El cero, imposible. El uno no puede ser (uno por uno, uno, nada). El dos, al multiplicarlo da solamente una cifra, el cuatro, y por esta misma razón tampoco puede ser el tres. El cuatro (cuatro por cuatro, dieciéis), y con un seis en las unidades no puede ser. El cinco (cinco por cinco, veinticinco), y con un cinco en la cifra de unidades, ESTE ES.

Pero vamos a seguir, por si existe alguno más. El seis (seis por seis, treinta y seis), y con un seis en la cifra de las unidades, ESTE TAMBIEN cumple la regla. El siete (siete por siete, cuarenta y nueve), no puede ser. El ocho (ocho por ocho, sesenta y cuatro), tampoco. El nueve (nueve por nueve, ochenta y uno), tampoco.

Luego la regla se cumple en el CINCO y en el SEIS.



La acupuntura es una terapia milenaria, practicada en Oriente y hoy día extendida por todo el mundo.

Su técnica consiste en pinchar superficialmente en el tejido subcutáneo con finas agujas de oro o plata, dejándolas clavadas durante un tiempo que puede variar de cinco minutos a varias horas, según el efecto que se desee.

Las primeras noticias escritas sobre esta ciencia se remontan a la dinastía Han (200 años antes de Cristo), época en que puede situarse el primer libro de medicina conocido en la historia: El Nuél-King.

Durante 45 siglos la medicina china en general, y la acupuntura en particular, han aido transmitidas religiosamente hasta nuestros días, reuniendo en gran número de libros sus observaciones.

Estos tesoros fueron ignorados en Occidente hasta mited del siglo XVII en que los primeroa misioneros aprovecharon su estancia en China para Iniciarse en los hechos científicos que veían, y trensmitirlos luego a la asombrada Europa.

Así que la progresión aritmética es de la forma:

$$-33, -18, -3, 12, \ldots$$

Ej.: La suma de tres números en progresión aritmética es 18 y su producto 162. Calcular los números:

Inicialmente vamos a denominar a los números en cuestión como a_1, a_2 y a_3.

A continuación les imponemos las condiciones que dicta el problema.

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 18 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= 162 \end{aligned}\right\}$$

Poniendo todos los términos de la progresión en función del primero y de la razón, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d &= 18 \\ a_1 (a_1 + d) (a_1 + 2d) &= 162 \end{aligned}\right\}$$

Sin embargo el problema en este caso resultaría más sencillo en cuanto al proceso de cálculo si se considerase como incógnita el término a_2 y se pusiesen los restantes en función a_2 y de d.

Veamos pues el detalle:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - d + a_2 + a_2 + d &= 18 \\ (a_2 - d)\, a_2\, (a_2 + d) &= 162 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 3a_2 &= 18 \\ (a_2^2 - d^2)\, a_2 &= 162 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 3a_2 &= 18 \\ a_2^3 - a_2 d^2 &= 162 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow a_2 = 6 \\ &\rightarrow 6^3 - 6d^2 = 162 \rightarrow 216 - 6d^2 = 162 \end{aligned}$$

$$54 = 6d^2 \rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \sqrt{9} = 3$$

Así que se deduce que:

$$a_2 = 6 \begin{cases} a_1 = 6 - 3 = 3 \\ a_3 = 6 + 3 = 9 \end{cases}$$

Luego los números pedidos son: 3, 6 y 9

Ej.: La suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia 3 es 516 y el último término vale 56. Calcular el número de términos de la progresión y el término tercero.

Formaremos un sistema de ecuaciones con los datos del problema:

$$\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 516 = \dfrac{a_1 + 56}{2} \cdot n \\ a_n = a_1 + (n-1)\,d \rightarrow 56 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \end{array}\right\}$$

Arreglando el sistema de ecuaciones obtenido en a_1 y n:

$$\left.\begin{array}{l} 1032 = a_1 n + 56n \\ 56 = a_1 + 3n - 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a_1 n + 56n = 1032 \\ a_1 + 3n = 59 \end{array}\right\} \rightarrow a_1 = 59 - 3n$$

Sustituyendo a_1 en la primera ecuación del sistema

$$(59 - 3n)n + 56n = 1032 \rightarrow 59n - 3n^2 + 56n = 1032$$

$$3n^2 - 115n + 1032 = 0 \; ; \; n = \frac{115 \pm \sqrt{115^2 - 12384}}{6} =$$

$$= \frac{115 \pm \sqrt{13225 - 12384}}{6} = \frac{115 \pm \sqrt{841}}{6} =$$

$$= \frac{115 \pm 29}{6} = \begin{cases} 24 \rightarrow n = 24 \\ \cancel{86/6 = 43/3} \rightarrow \text{no vale} \end{cases}$$

Para $n = 24 \rightarrow a_1 = 59 - 3 \cdot 24 = -13$

Así que teniendo el a_1 y d, el término tercero es:

$$a_3 = a_1 + 2d = -13 + 2 \cdot 3 = -13 + 6 = -7 \rightarrow \boxed{a_3 = -7}$$

Ej.: En una progresión aritmética cuyo primer término es 3, el noveno es al cuarto como el decimosexto es al séptimo. Formar la progresión.

Planteando las condiciones del problema (y teniendo en cuenta que la segunda es una proporción) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

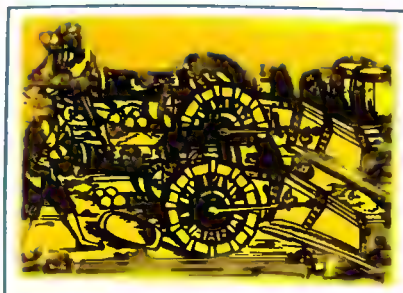
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ \dfrac{a_9}{a_4} = \dfrac{a_{16}}{a_7} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ \dfrac{a_1 + 8d}{a_1 + 3d} = \dfrac{a_1 + 15d}{a_1 + 6d} \end{array}\right\}$$

TENIS

En un campeonato de tenis celebrado en el instituto, y en virtud de un desafío da chicos contra chicas, concurrieron 24 jugadores en total.

M.ª de los Angeles jugó contra nueve varones; Diana contra diez, y así llegar hasta M.ª del Mar que jugó contra todos ellos. ¿Cuántos chicos y chicas habla?

Le solución en Pág. 640.



Los pueblos, por primitivos que sean, saben trazar toscos esquemas para indicar la posición relativa del lugar en que viven. Esta condición instintiva produjo los primeros mapas.

En el antiguo Egipto se empleaban métodos geomátricos para establecer las lindes de los territorios después de las inundaciones del Nilo.

En los sarcófagos persas y egipcios se han encontrado mepas del infiemo para que sirvieran de orientación al difunto.

Se conserva una pieza de arcilla de Mesopotamia con el mapa de un campo cultivado en Astria, y en Babilonia un mapa en que además de la tierra se indican mares y cuerpos celestes.

Los griegos, que aprovecharon los conocimientos matemáticos y de astronomía de los babilonios, concebían la tierra como un disco plano y circular rodeado por el tenebroso océano.

Un jonio, Anaximandro, trazó el mapa griego más antiguo que se conoce, del siglo VI antes de Cristo.

En un principio las distancias se medían en unidades relativas al hombre: así se marcaban tantos "días de camino" o tantas "horas de marcha"; el otro elemento, la dirección, hizo nacer loa itinerarios. Con los datos recogidos de esta forma se levantaron los mapas de las calzadas romanas.

La hiatoria de la cartografía es pues la historia del caminar humano por las tierras y los mares del mundo.

Al principio laa distancias se medían sobre el terreno, pero luego se vio que la trigonom ɔtría abreviaba muchísimo. La dirección fue conseguida por la sombra, por los vientos, por el mag-

(Continúa en la página siguiente)

Sustituyendo $a_1 = 3$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$$\frac{3 + 8d}{3 + 3d} = \frac{3 + 15d}{3 + 6d} \rightarrow (3 + 8d)(3 + 6d) = (3 + 3d)(3 + 15d)$$

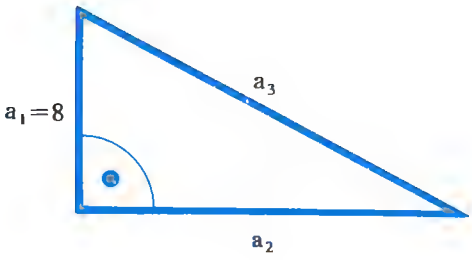
$$9 + 18d + 24d + 48d^2 = 9 + 45d + 9d + 45d^2$$

$$3d^2 - 12d = 0 \rightarrow 3d(d - 4) = 0 \begin{cases} 3d = 0; d = 0 \text{ (no vale)} \\ d - 4 = 0; d = 4 \end{cases}$$

Así que la progresión es:

$$3, 7, 11, 15, \ldots\ldots$$

Ej.: Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus longitudes están en progresión aritmética y que el menor mide 8 cm.



Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Y expresando todos los términos en función del primero y de la razón, obtenemos una ecuación con una incógnita en d.

$$(a_1 + 2d)^2 = a_1^2 + (a_1 + d)^2$$

$$a_1^2 + 4d^2 + 4a_1d = a_1^2 + a_1^2 + d^2 + 2a_1d$$

Sustituyendo $a_1 = 8$

$$8^2 + 4d^2 + 4 \cdot 8 \cdot d = 8^2 + 8^2 + d^2 + 2 \cdot 8 \cdot d$$

$$64 + 4d^2 + 32d = 64 + 64 + d^2 + 16d$$

$$3d^2 + 16d - 64 = 0$$

$$d = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 768}}{6} = \frac{-16 \pm \sqrt{1024}}{6} =$$

$$= \frac{-16 \pm 32}{6} = \begin{cases} 16/6 = 8/3 \\ -8 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Así que los tres lados del triángulo son:

$$8, 8 + \frac{8}{3}, 8 + 2 \cdot \frac{8}{3} \equiv 8, \frac{32}{3}, \frac{40}{3}$$

Ej.: Hallar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que forman progresión aritmética de razón igual a 25 grados.

En este tipo de problemas existe un dato implícito en él, que es la suma de todos los ángulos interiores del cuadrilátero, es decir, en este caso la suma de los cuatro términos de la progresión. Es conveniente recordar que la suma de los ángulos interiores de un polígono vale "tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos":

$$S = 2\ (n - 2) \text{ rectos}$$

En el caso del cuadrilátero es:

$$S = 2\ (4 - 2) = 4 \text{ rectos} = 4 \cdot 90 = 360^{\circ}$$

Así que utilizando esta condición de suma y nombrando a los cuatro ángulos por $a_1\ a_2\ a_3$ y a_4 tenemos:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 360 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 \rightarrow 180 = a_1 + a_4$$

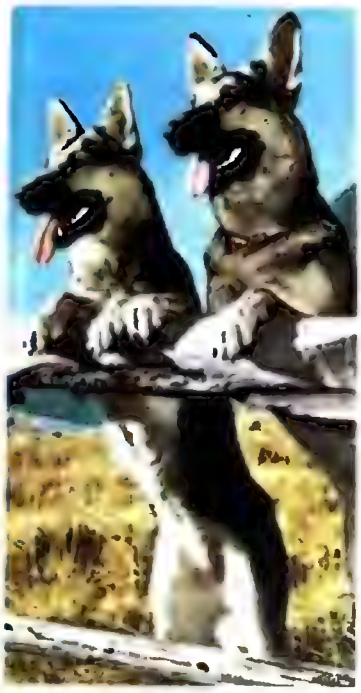
netismo terrestre, por la brújula y posteriormente por instrumentos más precisos.

Entretanto se había demostrado la esfericidad de la tiarrá y se crearon las medidas de latitud y longitud, el ecuador, los paralelos y los meridianos.

El mundo conocido se fue ampliando en virtud del comercio y de las guerras. La artillería, que planteaba problemas de línea de tiro y represantación fiel de la superficie, dio lugar al invento del contorno.

El primer mapa de Europa lo hizo un alemán, y el primero de América un español, Juan de la Cosa. Su mapa está fechado en 1500. Es primitivo, con la rosa de los vientos y línea de dirección.

El primer mapa que hicieron los portugueses del Nuevo Mundo lo ejecutó Alberto Cantino. Actualmente los mapas existen por millones y su perfección ha sido comprobada por las fotos tomadas desde los modernos satélites tripulados.



El rey Hamurabi de Babilonia, que reinó en el año 2.100 antes de Cristo, ya tenía en su ejército perros-soldados.

Quien haya leído a Plinio recordará que a menudo habla de perros utilizados en las guerras.

En la conquista de América los españoles también los utilizaron. A estos animales se los equipaba con armaduras metálicas apropiadas para salvarse de las flechas. Los indios los temían mucho.

Los ejércitos modernos disponen de cuerpos caninos en los que el animal cumple muy variadas misiones como la de centinela, camillero, telefonista, explorador, detector de gases y explosivos, y, sobre todo, los usan actualmente la policía en la lucha contra la droga.

No debemos desconocer que los españoles poseen una auténtica tradición canina con los podencos y alanos, razas naturales de nuestro país, constituidas por ejemplares muy apropiados para la vida en campaña. En general, la raza más utilizada hoy es la de los pastores alsacianos o perros lobos alemanes que admiten el adiestramiento y tienen gran memoria, arrojo y disciplina.

y poniendo todos los términos en función de a_1 y d, se obtiene:

$$180 = a_1 + a_1 + 3d \rightarrow 180 = 2a_1 + 3d \quad (d = 25^\circ)$$

$$180 = 2a_1 + 3 \cdot 25 \rightarrow 180 = 2a_1 + 75 \rightarrow 105 = 2a_1$$

$$a_1 = \frac{105}{2} = 52^\circ\, 30'$$

Luego los ángulos del cuadrilátero son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 52^\circ\, 30' &&= 52^\circ\, 30' \\ a_2 &= 52^\circ\, 30' + 25^\circ &&= 77^\circ\, 30' \\ a_3 &= 77^\circ\, 30' + 25^\circ &&= 102^\circ\, 30' \\ a_4 &= 102^\circ\, 30' + 25^\circ &&= 127^\circ\, 30' \\ & && \overline{360^\circ} \end{aligned}$$

Ej.: Un empleado se compromete a hacer un pozo en las siguientes condiciones: por el primer metro recibirá 1.000 ptas., y por cada metro más, 2.000 ptas. Si el pozo tiene 27 metros de profundidad, ¿cuánto recibirá el empleado?

Evidentemente el 1.°, 2.°, 3.°, ... metro indican el término de la progresión de pesetas que se forma, que es:

$$1.000,\ 3.000,\ 5.000,\ \ldots$$

Luego habrá que hallar la suma de los primeros veintisiete términos de la progresión formada que reproducirá la cantidad de pesetas que hay que pagar al empleado.

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S = \frac{a_1 + a_{27}}{2} \cdot 27$$

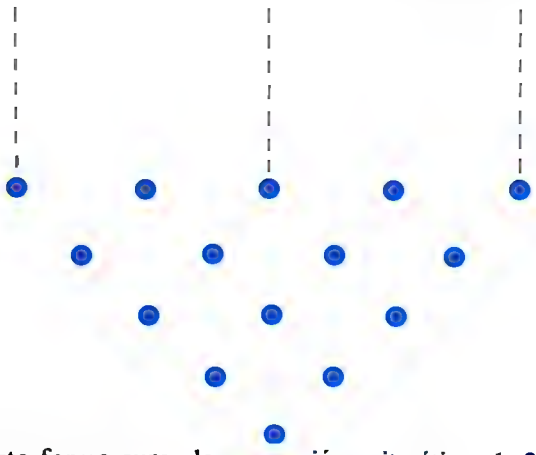
$$S = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot 27$$

$$S = \frac{1.000 + 1.000 + (27-1)\,2.000}{2} \cdot 27$$

$$S = \frac{1.000 + 1.000 + 52.000}{2} \cdot 27 = 729.000 \text{ ptas.}$$

Ej.: Un coronel dispone parte de su regimiento en forma de triángulo, es decir, un soldado en la primera fila, dos en la segunda, tres en la tercera, y así sucesivamente, resultando un total de 231 hombres. ¿Cuántas filas tiene el triángulo de la formación militar?

Observe en el gráfico cómo se forma la geometría de la figura.



De esta forma surge la progresión aritmética: 1, 2, 3, 4, ... correspondiendo cada fila al número de soldados que posee cada una, luego su suma es:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 231 = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n$$

$$231 = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n \rightarrow 231 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} n$$

$$462 = 2n + n^2 - n \rightarrow n^2 + n - 462 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1848}}{2} = \frac{-1 \pm 43}{2} = \begin{cases} 21 \\ -22 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Así que el triángulo de la formación posee 21 filas.

Ej.: Un número está formado por tres cifras en progresión aritmética, siendo su suma igual a 15. Si se multiplica la cifra de las centenas por 129 se obtiene el número en cuestión.

Averiguar de qué número se trata.

Inicialmente plantearemos el número teóricamente de la forma $a_3\ a_2\ a_1$ y usando las condiciones del problema se obtiene:

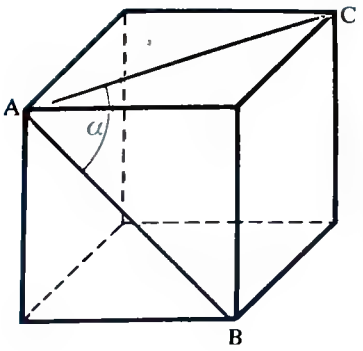
$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 15 \\ 129a_3 &= 100a_3 + 10a_2 + a_1 \end{aligned}\right\}$$

y poniendo los términos en función del segundo y de la razón:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - d + a_2 + a_2 + d &= 15 \\ 129\,(a_2 + d) &= 100\,(a_2 + d) + 10a_2 + a_2 - d \end{aligned}\right\}$$

De la primera ecuación del sistema se obtiene:

$$3a_2 = 15 \rightarrow a_2 = 5$$



Tenemos un cubo al que le trazamos las diagonales a dos caras del mismo, las $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Se pregunta: ¿cuántos grados tiene el ángulo α formado por las dos diagonales de las caras del cubo?

¡Cuidado, piénsalo bien!

La solución en Pág. 640.

y sustituyendo en la segunda ecuación del sistema:

$$129\ (5 + d) = 100\ (5 + d) + 10 \cdot 5 + 5 - d$$

$$645 + 129d = 500 + 100d + 50 + 5 - d$$

$$645 - 500 - 50 - 5 = -129d + 100d - d$$

$$90 = -30d \rightarrow d = -3$$

Luego las cifras del número son:

$$a_1 = a_2 - d = 5 - (-3) = 8$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = a_2 + d = 5 - 3 = 2$$

El número es pues:

$$a_3a_2a_1 \equiv 258$$

Las manos del hombre tienen expresión propia: pueden consolar, asir, desprenderse, ser firmes, convulsas, vacilantes, brutales, inspirar miedo o confianza, tiemblan, amenazan, juran o imploran, todos comprendemos el lenguaje de las manos.

La escritura manual es la expresión más auténtica de la personalidad humana; es una directa manifestación cerebral reconocida por los grafólogos desde el siglo XIX.

La mano del hombre en su forma actual es más antigua que su cerebro.

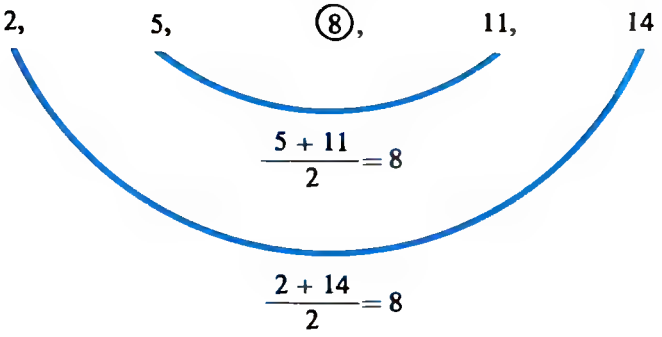
Durante un largo período de tiempo la mano pudo transformarse en un órgano destinado exclusivamente a tocar y asir, pero únicamente la lenta evolución del cerebro en el hombre primitivo convirtió la mano en el símbolo del ser humano. La forma y la estructura primitiva se ha conservado.

En relación al resto del cuerpo, la mano es pequeña, pero la zona cerebral que la corresponde es muy grande si se tiene en cuenta el tamaño del cerebro. Realmente la "mano cerebral" o "zona de la mano", combinada con la mano corpórea, es lo que ha hecho del hombre un ser superior.

6.–PROGRESIONES ARITMETICAS DE NUMEROS DE TERMINOS IMPAR. TERMINO CENTRAL

Para que una progresión aritmética posea término central es necesario que ésta tenga un número impar de términos. Siendo así el término central se puede obtener siempre haciendo la semisuma (mitad de la suma) de dos términos cualquiera equidistantes del central (operación que suele recibir el nombre de media aritmética).

Ej.: En la progresión aritmética: 2, 5, 8, 11, 14, obsérvense las diferentes formas de obtener el término central 8.



Definitivamente podemos precisar que el término central (a_c) de una progresión aritmética de número de términos impar puede responder a la siguiente expresión:

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Expresión que puede producir una consecuencia en la suma de los términos de la progresión:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \rightarrow \quad S = a_c \cdot n$$

y que consiste en conocer que la suma de los términos de una progresión aritmética de número de términos impar equivale al producto de su término central (a_c) por el número de términos de la progresión (n), independientemente de la también válida aplicación de la fórmula general de la suma para este tipo de progresiones aritméticas.

NOTA.–De lo que se deduce que en cualquiera progresión aritmética (de número de términos par o impar), la suma de dos términos equidistantes de los extremos (incluidos ellos), es siempre constante, es decir, igual.

Raimundo Lulio es una figura señera del pensamiento español.

Dejó una obra asombrosa por el dominio, profundidad, por la variedad de los temas tratados, y por la cultura y profundidad de pensamiento que revelan.

Escribió algunos de sus libros en árabe, aunque no se conserva ninguno.

Son numerosos y se conservan sus escritos en catalán y en latín.

Fue poeta y prosista. Se le considera el primer poeta que escribió en lengua catalana, aunque todavía con la influencia del provenzal; como prosista hay que estimar separadamente al filósofo, al teólogo, al místico y al moralista.

Inventó un aparato que permitía determinar la situación de los barcos en cualquier momento. Previó las causas de las mareas.

La doctrina de Ramón Lull se extendió rápidamente por los estados de Aragón; creó escuela y alcanzó gran prestigio hasta el siglo XVI.

Ya en vida, la Universidad de París reconoció la ortodoxia y utilidad de sus doctrinas, logrando su apogeo cuando fue expuesta en la Universidad de Alcalá y en la de Valencia.

El cardenal Cisneros editó sus obras, que Felipe II tuvo en gran estima.

Nació en Palma de Mallorca en 1235, y se cree que también murió en Mallorca en 1315, trasladado de Argelia donde fue gravemente herido por los musulmanes.

Ej.: En la progresión 2, 6, 10, 14 se verifica:

$$2 + 14 = 6 + 10$$

Ej.: En la progresión 3, 5, 7, 9, 11 se verifica:

$$3 + 11 = 5 + 9$$

Ej.: La suma de los términos de una progresión aritmética es 182 y el término central vale 13. Hallar el número de términos de la progresión.

Aplicando la suma de los impares se obtiene:

$$S = a_c \cdot n \rightarrow 182 = 13 \cdot n$$

$$n = \frac{182}{13} = 14 \text{ términos}$$

Ej.: En una progresión aritmética de un número impar de términos la suma de los que ocupan lugar impar es 75 y la suma de los que ocupan lugar par es 60. Calcular el término central y el número de términos de la progresión. Es evidente que en una progresión aritmética de número de términos impar la diferencia entre la suma de los que ocupan lugar impar menos la suma de los que ocupan lugar par deben ser el valor del término central.

$$a_c = 75 - 60 = 15$$

y el número de términos de la progresión es:

$$S = a_c \cdot n \rightarrow 75 + 60 = 15 \cdot n$$

$$135 = 15n \rightarrow n = \frac{135}{15} = 9$$

SOLUCION AL CAMPEONATO MUNDIAL DE FUTBOL (pág. 599).

Vamos a ver primero entre las tres enfermeras dónde hay alguna contestación igual.

Entre la 1.ª y la 2.ª enfermera hay una contestación igual, la primera (Campeón, Francia).

Entre la 2.ª y la 3.ª hay una constestación igual, la segunda (segundo, Alemania).

Entre la 1.ª y la 3.ª no existe ninguna contestación igual. Así, pues, una de ellas miente y la otra siempre dice verdad.

La segunda es la que alterna las contestaciones.

Veamos detenidamente estas contestaciones, ya que esta segunda puede decir verdad o mentira. Si dice la primera serie de proposiciones (verdad, mentira, verdad), el campeón sería Francia, el segundo no sería Alemania y el tercero sería Italia y se desdice totalmente con el primero; y con la segunda proposición sería semejante. Entonces ya sabemos que la primera enfermera miente. La segunda alterna (sólo las contestaciones).

Comparando la segunda, que es la que alterna las contestaciones, con la tercera que será la que dice verdad, vemos que sólo tienen en común una contestación, la segunda. Entonces esta segunda enfermera dice mentira (la 1.ª contestación), verdad (la segunda contestación) y mentira (la tercera contestación).

Respuesta: Campeón, Italia; segundo, Alemania, y tercero, Francia.

7.–LAS PROGRESIONES ARITMETICAS Y LOS CONJUNTOS

Una progresión aritmética se entiende como una aplicación del conjunto N^*, de los números naturales, en el conjunto R de los números reales.

$$N^* \xrightarrow{\ f\ } R$$

El criterio f que define tal aplicación queda definido por la ley de formación de la progresión, cuya representatividad matemática viene expresada por su término general.

$$N^* \xrightarrow{\ a_n = a_1 + (n-1)\,d\ } R$$

Ej.: En la progresión 2, 6, 10, . . ., el término general obtenido por la fórmula es:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d;\ a_n = 2 + (n-1)\,4 = 2 + 4n - 4;\ a_n = 4n - 2$$

Luego la aplicación es:

$$N^* \xrightarrow{\ f:\ a_n = 4n - 2\ } R$$

Obsérvese cómo al dar valores naturales a n se obtienen sucesivamente términos de la progresión que en este caso también son naturales pero que en general serán términos reales.

Para $n = 1$ (primer término) $\rightarrow a_n = 4n - 2 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$

Para $n = 2$ (segundo término) $\rightarrow a_n = 4n - 2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6$

Para $n = 3$ (tercer término) $\rightarrow a_n = 4n - 2 = 4 \cdot 3 - 2 = 10$

⋮ ⋮

Existen personas con fantástica memoria.

En la O.N.U. traductores orales que dan versión instantánea en cuatro lenguas de un discurso recién escuchado. El filósofo inglés Jeremías Benthan aprendió el latín y el griego antes de cumplir los 4 años. El matemático alemán Zacarías Dave multiplicó mentalmente dos cantidades de 100 cifras.

Los sabios afirman que cualquier individuo normal no usa durante su vida nada más que la cuarta parte de su capacidad mental. Todos disponemos de reservas que no utilizamos. Muchos jovencitos que tropiezan constantemente en sus estudios, archivan sin dificultad en su cerebro los goles de los equipos que participan en la liga.

Todavía el cerebro humano sigue siendo una zona insuficientemente conocida. Es intrincado y poderoso. Los dos litros aproximados de materia gris que lo forman unen en sí vista, oído, memoria e imaginación.

No esquivemos las cuestiones porque nos resulte difícil entenderlas; quizás tengamos facultades mentales prodigiosas que podríamos utilizar y no nos damos cuenta de ello por pereza.

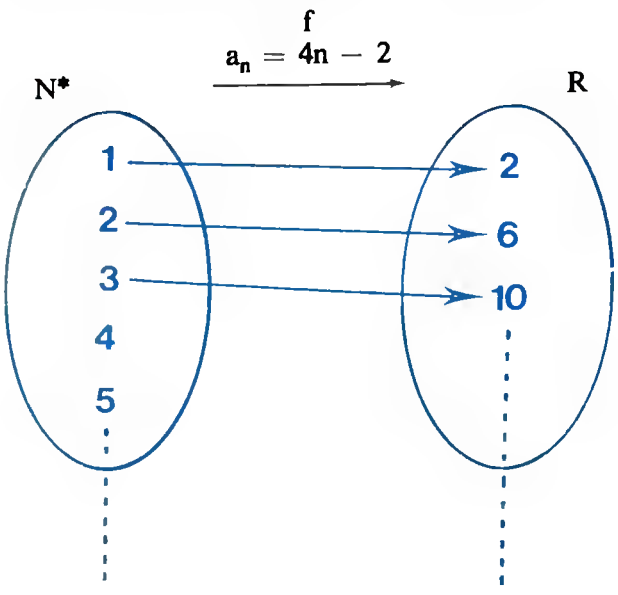
La dominación romana en España había impuesto el uso general de la lengua latina. Al romperse y fragmentarse dicho imperio hizo desaparecer esta unidad lingüística. La conquista de la Península Ibérica por los árabes y la inmediata destrucción de la monarquía visigoda favorecen el nacimiento de una serie de dialectos. En el siglo X algunos de éstos ya tienen documentación escrita; se hablan seis: leonés, gallego, castellano, catalán, mozárabe y navarro-aragonés. El castellano presentó desde su origen un deseo innovador. Este deseo progresista de los castellanos que, constituidos en reino a mediados del siglo XI, empiezan a influir en León y Navarra, se desplaza rápidamente hacia el Sur, anulando definitivamente a los decadentes dialectos mozárabes.

La primera obra de gran extensión en la que el castellano se utiliza con fines literarios es el "Cantar del Mío Cid".

El cultivo definitivo del castellano como lengua escrita se oficializa en tiempos de Fernando III, que lo impuso en los documentos de estado en lugar del latín.

La etapa medieval de esta lengua puede considerarse terminada con la publicación de la primera gramática castellana escrita por Nebrija en 1492.

Y cuyo gráfico quedaría expuesto de la siguiente forma:



$n \in N^*$ y $a_n \in R$

TEMA 24

PROGRESIONES GEOMETRICAS

INDICE

1.–DEFINICION.
2.–TERMINO N–ENESIMO DE UNA PROGRESION GEOMETRICA.
3.–INTERPOLACION GEOMETRICA.
4.–TERMINOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS.
5.–PRODUCTO DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA LIMITADA.
6.–SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA LIMITADA.
7.–SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA ILIMITADA.
8.–GENERATRIZ DE NUMEROS DECIMALES PERIODICOS.

TEMA 24

Galileo Galilei tuvo noticias de que un óptico holandés llamado Hans Lippershey había inventado y construido un telescopio.

El, que estaba interesado en la observación de los astros, se dedicó al trabajo: calculó y construyó otro al año siguiente en 1609. En realidad ambos modelos eran todavía muy toscos, pero a Galileo le sirvieron para realizar numerosos e importantes descubrimientos en astronomía. Estos telescopios primitivos tenían un gran defecto: alrededor de la imagen se veía un reborde coloreado.

Años más tarde, Isaac Newton superó este inconveniente al inventar el telescopio de reflexión que cambiaba la lente principal por un espejo curvado.

PROGRESIONES GEOMETRICAS

1.–DEFINICION

Llamamos progresión geométrica a toda sucesión real, en la que cada uno de los términos se obtiene del anterior al multiplicarle por una constante que llamaremos razón.

Ejemplo:

1) La sucesión: 1, 3, 9, 27, 81, ..., 3^{n-1} es una progresión geométrica creciente de razón 3.

Progresión geométrica creciente es aquella que cada término es mayor que el anterior.

2) La sucesión: 4, 2, 1, 1/2, ..., 2^{3-n} es una progresión geométrica decreciente de razón 1/2.

Progresión geométrica decreciente es aquella que cada término es menor que el anterior.

3) La sucesión: $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, ... es una progresión geométrica de razón $\sqrt{3}$.

4) La sucesión: 4, −2, 1, −1/2, 1/4, ... es una progresión geométrica de razón 1/2.

2.–TERMINO EN N-ENESIMO DE UNA PROGRESION GEOMETRICA O TERMINO GENERAL

Si $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \ldots\ a_n$ son los términos de una progresión geométrica de razón "r" se puede escribir:

$$\frac{a_2}{a_1} = r$$

$$\frac{a_3}{a_2} = r$$

$$\frac{a_4}{a_3} = r$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Multiplicando miembro a miembro las $n-1$ igualdades tendremos:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} = r^{n-1}$$

Simplificando tendremos que $\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$

Despejando a_n nos quedará

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

que es la fórmula matemática del **término general.**

Ejemplo:

1) Calcular el término octavo de la progresión geométrica 1, 3, 9, 27, ...

Como $a_1 = 1$, la razón "r" $= 3$ y $n = 8$.

Aplicando la fórmula del término general tendremos:

$$a_8 = a_1 \cdot r^{8-1}$$

Sustituyendo, $a_8 = 1 \cdot 3^7$; $a_8 = 3^7$ de donde $a_8 = 2.187$.

2) De una progresión geométrica de razón 2 se conoce $a_5 = 6$. Hallar a_1.

Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ que particularizada para este caso concreto nos quedaría:

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$$

Sustituyendo, $6 = a_1 \cdot 2^4$ de donde $a_1 = \frac{6}{2^4}$; $a_1 = \frac{6}{16}$

Simplificando, $a_1 = \frac{3}{8}$

Aún hay regiones en el mundo que no han sido totalmente exploradas.

Las junglas de América del Sur y Suroeste de Asia, los grandes desiertos de Africa y Asia, les gigantescas montañas encerradas en el helado corazón de Asia.

Todo esto constituye materiel de estudio para los exploredores-arqueólogos. Estos hombres, trabejadores infatigebles, tienen que unir a profundos conocimientos de variadas ciencias el genio analítico de un detective.

Las regiones más inexploradas objetivo próximo para estas expediciones son: las islas árticas canadienses, el desierto del Tibet y las tierras heladas de Patagonia.

A medida que avanzó el siglo XX los países desconocidos fueron disminuyendo.

Nuestro conocimiento ha crecido rápidamente, pero al precio de terribles pruebas y con el sacrificio de vidas humanas, ya que en estas zonas la naturaleza es cruel y poderosa: los círculos polarea son los más temibles.

Los problemas que afronte el explorador arqueólogo son tan arduos como los que tiene que resolver el geógrafo pera la conquista de la Naturaleza; ellos luchan sin cesar para descubrir el rostro de lo desconocido.

A consecuencia de sus investigaciones radioactivas, los esposos Curie recibieron en el año 1903 el premio Nóbel de Física. Lo reparten con Henri Becquerel, con quien ellos habían compartido muchas veces sus impresiones sobre la peligrosidad de las radiaciones radiactivas.

— Becquerel se produjo una grave quemadura en el pecho cuando guardó en el bolsillo del chaleco un tubito de vidrio con radio.

— María Curie tenía en sus dedos huellas de su trabajo y Pedro Curie, por puro afán investigador, se provocó a sí mismo una lesión con radio.

Este premio, junto a su asignación monetaria, les proporciona además de la fama y el reconocimiento a su trabajo, la posibilidad de superar la abrumadora estrechez en que vivían. El esposo puede al fin dejar su empleo docente en la Escuela de Física y consagrarse íntegramente a la investigación.

Los esposos Curie, agotados por el trabajo, no pueden trasladarse a Estocolmo a recoger personalmente el premio de manos del Rey de Suecia. Pidieron una prórroga.

Fue ella la primera mujer que recibió el premio Nóbel. También el segundo en 1911 (Química), entregado a una mujer, fue para María y el tercero en 1935 (Química) fue para su hija Irene. Caso rarísimo de acumulación de premios Nóbel que difícilmente se repetirá. Nacida en 1867, murió en 1934. Creemos que nunca hubo sesenta y siete años más fecundos ni ejemplares entre las criaturas humanas.

3) En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón es 3. Hallar la expresión del término general.

$$a_1 = 5 \quad ; \quad r = 3$$

Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ tendremos que:

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

Operando $a_n = \frac{5 \cdot 3^n}{3}$; ésta será la expresión del término general.

4) Calcular el octavo término de una progresión geométrica cuyo primer término es 81 y la razón 1/3.

$$a_1 = 81 \quad ; \quad r = 1/3 \quad y \quad n = 8$$

Aplicando la fórmula del término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ que particularizada será $a_8 = a_1 \cdot r^{8-1}$.

Sustituyendo: $a_8 = 81 \cdot (1/3)^7$; operando:

$$a_8 = 3^4 \cdot \frac{1}{3^7}; \; a_8 = \frac{3^4 \cdot 1}{3^7}; \; a_8 = 3^{-3}; \; a_8 = \frac{1}{3^3}$$

5) En una progresión geométrica los términos tercero y quinto valen respectivamente $3/\sqrt{2}$ y $3/2\sqrt{2}$. Hallar la razón y el primer término.

$$a_3 = 3/\sqrt{2} \rightarrow n = 3 \qquad a_5 = 3/2\sqrt{2} \rightarrow n = 5$$

Aplicando la fórmula del término general particularizada para cada uno de ellos, nos quedará:

$$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}; \; a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}; \; a_5 = a_1 \cdot r^4$$

Sustituyendo:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = a_1 \cdot r^2$$

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} = a_1 \cdot r^4$$

Dividiendo miembro a miembro estas dos igualdades tendremos:

$$\frac{3/\sqrt{2}}{3/2\sqrt{2}} = \frac{a_1 \cdot r^2}{a_1 \cdot r^4} \text{ y simplificando, } \frac{6}{3} = \frac{r^2}{r^4};$$

$$2 = r^{-2}; \; 2 = \frac{1}{r^2}; \; r^2 = \frac{1}{2}; \; \boxed{r = \sqrt{1/2}}$$

Para calcular a_1 tendremos que sustituir en cualesquiera de las dos ecuaciones anteriores.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = a_1 \cdot r^2 \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2\sqrt{2}} = a_1 \cdot r^4$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = a_1 (\sqrt{1/2})^2 \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2\sqrt{2}} = a_1 (\sqrt{1/2})^4$$

Despejando a_1 en cualesquiera de las dos, nos quedaría:

$$a_1 = \frac{3/\sqrt{2}}{1/2}; \; a_1 = \frac{6}{\sqrt{2}}, \text{ racionalizando: } a_1 = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{a_1 = 3\sqrt{2}} \text{ ó } a_1 = \frac{3/2\sqrt{2}}{1/4}; \; a_1 = \frac{12}{2\sqrt{2}}; \; a_1 = \frac{6}{\sqrt{2}};$$

racionalizando: $a_1 = \frac{6\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{a_1 = 3\sqrt{2}}$

6) Sea una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}$ cuyo primer término es 2. Hallar a_{15}.

$a_1 = 2; \quad r = \sqrt{2} \quad$ y $\quad n = 15$

Aplicando la fórmula del término general particularizado:

$a_{15} = a_1 \cdot r^{15-1}$ y sustituyendo, $a_{15} = 2 \cdot (\sqrt{2})^{14}$

$a_{15} = 2 \cdot 2^7 \quad ; \quad a_{15} = 2^8 \quad ; \quad a_{15} = 1.024$

7) En una progresión geométrica se tiene $a_6 = 4$ y $a_4 = 36$. Hallar el término general y la razón.

$a_4 = 36 \rightarrow n = 4$

$a_6 = 4 \rightarrow n = 6$

Aplicando la fórmula del término general particularizado:

$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1}$; sustituyendo: $36 = a_1 \cdot r^3$

$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1}$; sustituyendo: $4 = a_1 \cdot r^5$

Dividiendo miembro a miembro, tendremos:

$$\frac{36}{4} = \frac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r^5}, \text{ simplificando: } 9 = \frac{r^3}{r^5}; \; 9 = r^{-2};$$

$$9 = \frac{1}{r^2}; \; r^2 = \frac{1}{9}; \; r = \sqrt{1/9}; \; \boxed{r = \frac{1}{3}}$$

En el antiguo Egipto la magia estaba asociada con los adivinos y era muy respetada. Los ilusionistas que utilizan sombreros y bolas tuvieron predecesores hace muchos siglos.

Pero desde el comienzo de la Era Cristiana toda forma de magia o de ilusionismo fue considerada brujería; se perseguía al mismo tiempo y con la misma crueldad a los titiriteros y a los practicantes de juegos de manos.

Actualmente los hombres "ligeros de manos" son admiradísimos en el mundo del espectáculo; pero hasta ahora ¡cuántos siglos de amenazas y de persecuciones tuvieron que soportar!

Naturalmente que todos los ilusionistas tienen su truco particular que aplican a algún número propio que los hace famosos.

Así, el ilustre Houdine, rey de la evasión, podía escaparse de una red, de una caja, de un barril, abrir cerraduras y librarse de cadenas. En realidad, como él mismo contó en un libro, llevaba disimuladas en el traje multitud de ganzúas, limas, barritas de acero y pequeñas llaves que utilizaba con sin igual pericia. Reveló sus trucos en un libro, pero nadie pudo volver a realizar sus asombrosos ejercicios.

Para el dominio de la fuerza proporcionada por el vapor de agua fue de importancia capital el descubrimiento de un dispositivo que evitase la explosión del recipiente o caldera en que el vapor se almacenaba. Este ingenioso aparato fue la válvula de seguridad. Se componía en un principio de un pequeño orificio situado en la tapa de la caldera; una palanca con un pequeño tapón metálico lo cerraba; en ella se colocaba un peso proporcionado a la presión de la caldera. Si ésta se hace demasiado fuerte empuja la palanca hacia arriba y el vapor puede escaparse. Con esta válvula quedaba dominada la ingente fuerza del vapor y se abría paso a toda una era de máquinas impulsadas por este elemento.

Denia Papin fue el creador de la marmita que lleva su nombre y hasta que desarrolló la citada válvula producía vapor, pero siempre acababa explotándola la olla. El no sabía lo que sabamos hoy, y es que la marmita de Papin es un recipiente mágico del cual había de surgir la máquina de vapor.

Para hallar el término general, tendremos que averiguar primero el valor de a_1; para ello basta con sustituir en cualesquiera de las dos primeras ecuaciones.

$$36 = a_1 \cdot r^3; \quad 36 = a_1 \cdot (1/3)^3; \quad a_1 = \frac{36}{1/27}; \quad a_1 = 36 \cdot 27;$$

$$4 = a_1 \cdot r^5; \qquad \boxed{a_1 = 972}$$

Aplicando la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; \quad a_n = 972 \cdot (1/3)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{972}{3^{n-1}}; \quad a_n = \frac{972 \cdot 3}{3^n}; \quad a_n = \frac{2.916}{3^n}$$

8) ¿Qué lugar ocupa 162 en la progresión geométrica de término general $a_n = 2 \cdot 3^n$?

Sustituyendo en el término general: $a_n = 162$

$$162 = 2 \cdot 3^n; \quad \text{despejando; } 3^n = \frac{162}{2}; \quad 3^n = 81$$

$3^n = 3^4$; como las bases son iguales los exponentes tendrán que serlo para que se cumpla igualdad, por lo que:

$$\boxed{n = 4}$$

9) En una progresión geométrica la diferencia entre el 4.º término y el 2.º es 120, si el 3.er término vale 32. Averiguar la razón y los cuatro primeros términos.

Planteándolo como un sistema, tendremos:

$$a_4 - a_2 = 120$$

$$a_3 = 32$$

Si ponemos estos términos en función de a_1:

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

nos quedará que:

$$a_1 \cdot r^3 - a_1 \cdot r = 120$$

$$a_1 \cdot r^2 = 32$$

Si sacamos factor común a_1 en la 1.ª ecuación:

$a_1 (r^3 - r) = 120$; despejando, $a_1 = \frac{120}{(r^3 - r)}$ y sustituyendo en la 2.ª ecuación: $\frac{120}{(r^3 - r)} \cdot r^2 = 32$; sacando factor común r:

$\frac{120 \cdot r^2}{r(r^2 - 1)} = 32$; y simplificando: $\frac{120r}{r^2 - 1} = 32$; operando:

$120r = 32 (r^2 - 1)$

$120r = 32r^2 - 32$

$32r^2 - 120r - 32 = 0$, simplificando;

$4r^2 - 15r - 4 = 0$

El valor de las raíces de esta ecuación de 2.º grado será:

$r = 4$ y $r = -1/4$

$a_1 = 32/r^2$; $a_1 = \frac{32}{16}$; $a_1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot 4$; $a_2 = 8$

$a_3 = 2 \cdot 16$; $a_3 = 32$

$a_4 = 2 \cdot 64$; $a_4 = 128$

3.–INTERPOLACION GEOMETRICA

Interpolar "n" medios geométricos entre dos números dados consiste en hallar n números, tales que formen progresión geométrica de n + 2 términos, siendo los extremos los dos números dados.

Para ello es suficiente hallar la razón de la progresión de término general:

$$a_{n+2} = a_1 \cdot r^{n+2-1}$$

Despejando r, tendremos:

$r^{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_1}$, de donde $r = \sqrt[n+1]{\frac{a_{n+2}}{a_1}}$

siendo a_{n+2} uno de los números dados y a_1 el otro.

"n" = al número de medios geométricos.

Papin, en los experimentos que realizó, quería conseguir un alimento barato: su pensamiento era conservar la esencia de la carne. Esta idea ya había sido acariciada por los alquimistas que pensaban en la necesidad de conservar el extracto vital de los manjares, el contenido divino. Papin consiguió con su marmita a presión, antecedente de las ollas que utilizan hoy día todas las mujeres, un concentrado de carne y otro de verduras en forma de gelatina. El pensaba en la producción masiva de sopas nutritivas y de buen sabor hechas con productos de escaso valor, como huesos viejos, vegetales de poca calidad, etc., y que por cocerlos a elevadas temperaturas los convierte en otros más nobles y de mejor sabor.

Los alquimistas trabajaron antes que él para conseguir alimentos que permitieran al hombre prescindir de su dentadura animal sin tener que desgarrarlos y masticarlos, y así los dientes servirían sólo para adorno que la naturaleza se encargaría de igualar y conservar sanos por su poco uso.

La fortuna llama siempre a la puerta del que sonríe.

(Proverbio indio)

Haz siempre lo que te parezca difícil hacer.

Emerson

Si lloras porque se oculta el sol, tus lágrimas te impedirán ver el brillo de las estrellas.

Rabindranath Tagore

La fortuna favorece a los audaces.

Cuando no se tiene lo que sa quiere, hay que saber querer lo que se tiene.

Séneca

Es preferible afrontar lo que horroriza, que vivir horrorizado toda la vida.

Shakespeare

Más que craar afectos hay que crear intereses.

(Crispín)
Benavente

Una vez hallada la razón los números buscados serán:

$$x_1 = a_1 \cdot r$$

$$x_2 = a_1 \cdot r^2$$

y así sucesivamente hasta completar el número "n".

Ejemplo:

1) Interpolar 5 medios geométricos entre 81/4 y 16/9. La sucesión quedaría:

$81/4, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 16/9$

$a_1 = 81/4$

$a_n = 16/9$

n-medios $= 5$

Aplicando la fórmula de la interpolación:

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{a_n}{a_1}}; \quad r = \sqrt[6]{\frac{16/9}{81/4}}; \quad r = \sqrt[6]{\frac{16 \cdot 4}{81 \cdot 9}};$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{2^6}{3^6}}; \quad r = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = a_1 \cdot r \; ; x_1 = 81/4 \cdot 2/3 \; ; x_1 = \frac{3^4 \cdot 2}{2^2 \cdot 3}; \; x_1 = \frac{3^3}{2}; \; x_1 = \frac{27}{2}$$

$$x_2 = a_1 \cdot r^2 \; ; x_2 = 81/4 \cdot (2/3)^2 \; ; x_2 = \frac{3^4 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 3^2}; x_2 = 3^2 \; ; x_2 = 9$$

$$x_3 = a_1 \cdot r^3 \; ; x_3 = 81/4 \cdot (2/3)^3 \; ; x_3 = \frac{3^4 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 3^3}; x_3 = 3 \cdot 2; x_3 = 6$$

$$x_4 = a_1 \cdot r^4 \; ; x_4 = 81/4 \cdot (2/3)^4 \; ; x_4 = \frac{3^4 \cdot 2^4}{2^2 \cdot 3^4}; x_4 = 2^2; x_4 = 4$$

$$x_5 = a_1 \cdot r^5 \; ; x_5 = 81/4 \cdot (2/3)^5 \; ; x_5 = \frac{3^4 \cdot 2^5}{2^2 \cdot 3^5}; \; x_5 = \frac{2^3}{3}; \; x_5 = \frac{8}{3}$$

Sustituyendo en la sucesión primera quedaría:

81/4, 27/2, 9, 6, 4, 8/3, 16/9

2) Interpolar 5 medios geométricos comprendidos entre $\sqrt{3}$ y $27\sqrt{3}$.

La sucesión quedaría:

$\sqrt{3}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 27\sqrt{3}$ en la que $a_1 = \sqrt{3}$ y $a_n = 27\sqrt{3}$.

Sustituyendo en la fórmula de la interpolación:

$r = \sqrt[n+1]{\frac{a_n}{a_1}}$; donde: $a_n = 27\sqrt{3}$, $a_1 = \sqrt{3}$ y n-medios = 5

$r = \sqrt[6]{\frac{27\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$; $r = \sqrt[6]{27}$; $r = \sqrt[6]{3^3}$; $r = \sqrt{3}$

$x_1 = a_1 \cdot r$; $x_1 \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$; $x_1 = 3$

$x_2 = a_1 \cdot r^2$; $x_2 = \sqrt{3} \quad (\sqrt{3})^2$; $x_2 = 3\sqrt{3}$

$x_3 = a_1 \cdot r^3$; ..... $x_3 = 9$

$x_4 = a_1 \cdot r^4$; ..... $x_4 = 9\sqrt{3}$

$x_5 =$ ..... $x_5 = 27$

4.–TERMINOS EQUIDISTANTES

En toda progresión geométrica el producto de los términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

Dada la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ se verificará que:

$$a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = a \ldots = a_1 \cdot a_n$$

Para demostrarlo basta escribir los dos miembros de la igualdad, utilizando la fórmula del término general:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_{n-1} = a_1 \cdot r^{n-2}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Sustituyendo en $a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot a_n$ quedaría:

$$a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^{n-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1^2 \cdot r^{n-2+1} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

$a_1^2 \cdot r^{n-1} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$, con lo que habremos llegado a una identidad como pretendíamos demostrar. Exactamente igual sucederá si tomásemos cualesquiera de los términos de la igualdad.

Si la progresión geométrica tiene un número impar de términos, el término central sería igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Su explicación sería una aplicación de la media proporcional o geométrica.

$$\frac{a_1}{a_c} = \frac{a_c}{a_n}; \; a_c^2 = a_1 \cdot a_n \text{ de donde } a_c = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

El cuerpo humano, para realizar perfectamente sus funciones, necesita minerales que favorecen las diversas combinaciones químicas imprescindibles para el proceso vital.

El azufre, el cloro, el potasio, el magnesio, el fósforo, el hierro, el manganeso, el yodo, el cinc y el cobalto entran normalmente en una dieta equilibrada.

La carencia de estos minerales es causa de enfermedades más o menos graves; por lo tanto, conviene que el organismo ingrese tales sustancias. Ahora bien, a excepción del cloruro de sodio o sal común, estos elementos minerales no pueden ser asimilados por el cuerpo ni en estado puro ni en forma de sales inorgánicas sino solamente en forma de sales orgánicas contenidas en los alimentos animales o vegetales.

Así, el calcio lo obtenemos en forma de caseínas asimilables que contiene la leche; el hierro está contenido en las hojas verdes de las hortalizas; el aluminio, en las cebollas; el azufre, en la soja; el cinc, en la avena; la langosta es rica en cobre; el cacao en polvo nos da el magnesio; las patatas, el níquel, el bromo y el titanio; la levadura seca, el fósforo; el magnesio, las sardinas; el cobalto está en el tomate; el hierro, en el hígado de cerdo, etc.

También los chinos tienen su leyenda sobre el origen del mundo.

Lo primero en crearse fue el Tai-Ki, el gran límite.

El Tai-Ki se divide en dos principios: el activo, Yang, y el pasivo, Yin. De la unión de las partículas Yang y de las partículas Yin proceden los cinco elementos: fuego, agua, tierra, madera y metal, a los que agregando el sol y la luna completa los siete gobiernos del mundo.

Cada elemento produce una dinastía de reyes, y terminada esta serie se vuelve a empezar, y así sucederá hasta el fin de los tiempos. En cada dinastía el mundo es dominado por el elemento que la produjo.

Pan-Ku, el prototipo de la humanidad, fue quien dio forma a la tierra y fue el primer soberano. Luego las tres potencias, cielo, tierra y hombre, continúan la evolución del mundo en doce períodos que corresponden a los doce signos zodiacales.

Los chinos han sido excelentes investigadores del pasado. Hablaron de una "edad de piedra" mucho antes que en Occidente. Su cultura es original, sin influencia de otros pueblos.

Ejemplos:

1) Dada la sucesión: 3, 9, 27, 81, 243, 729

$3 \cdot 729 = 9 \cdot 243 = 27 \cdot 81$

$2187 = 2187 = 2187$

Hallar la media proporcional entre 1/8 y 1/2.

$a_n = 1/2 \qquad a_1 = 1/8$

$a_c = \sqrt{a_n \cdot a_1}$; $a_c = \sqrt{1/2 \cdot 1/8}$; $a_c = \sqrt{1/16}$; $a_c = 1/4$ (término central)

5.—PRODUCTO DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA LIMITADA

Es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevados a un exponente igual al número de términos.

Sea la progresión: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$, el producto se obtendría multiplicando todos los términos de la progresión.

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n,$$

ó también

$$P = a_n \cdot a_{n-1} \ldots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando miembro a miembro estas dos igualdades, tendríamos:

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \ldots (a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1)$$

Como estos productos corresponden a términos equidistantes de los extremos, podríamos escribir la igualdad anterior:

$P^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$, de donde

$$P = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Si el número de términos es impar, $a_1 \cdot a_n = a_c^2$ de donde $P = \sqrt{(a_c^2)^n}$

$$P = a_c^n$$

NOTA.—Se utilizará la fórmula con el signo menos (−) cuando la progresión sea de números negativos e impar. Extrayendo la raiz cuadrada del valor absoluto del producto.

Ej.: Dada la progresión geométrica 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{a}$, . . ., calcular el producto de los ocho primeros términos.

Si aplicamos la fórmula del producto $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$ para este caso, tendríamos $P = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8}$.

$$a_8 = a_1 \cdot r^7 \; ; a_8 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^7 \; ; a_8 = \frac{3}{3^7} \; ; a_8 = \frac{1}{3^6}$$

Sustituyendo:

$$P = \sqrt{\left(3\frac{1}{3^6}\right)^8}; \; P = \left(\frac{3}{3^6}\right)^4$$

$$P = \frac{3^4}{3^{24}} \; ; P = 3^{-20}; \; P = \frac{1}{3^{20}}$$

6.–SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA LIMITADA

Dada la progresión: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ la podemos escribir en función de a_1:

$$a_1, \; a_1r, \; a_1r^2, \; \ldots \; a_1r^{n-3}, \; a_1r^{n-2}, \; a_1r^{n-1}$$

La suma de sus términos será:

$$S = a_1 + a_1r + a_1r^2, \ldots + a_1r^{n-3} + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$$

Multiplicando los dos miembros por la razón será:

$$rS = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3, \ldots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} + a_1r^n$$

Restando estas dos últimas igualdades, resulta:

$$rS - S = -a_1 + (a_1r - a_1r) + (a_1r^2 - a_1r^2) \ldots +$$

$$+ (a_1r^{n-2} - a_1r^{n-2}) + (a_1r^{n-1} - a_1r^{n-1}) + a_1r^n$$

Sacando factor común:

$$S(r-1) = a_1r^n - a_1 \text{ de donde } S = \frac{a_1r^n - a_1}{r-1}$$

$$\boxed{S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}$$

Según el término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, la suma en función de a_n será:

$$\boxed{S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}$$

DEDUCIR

Holmes y el Dr. Watson se encontraban en el gabinete del primero. Holmes estaba sentado y con la barbilla pegada en el pecho como si estuviera durmiendo, hasta que levantando la cabeza le dijo a Watson:

—¿De manera, Watson, que no piensa invertir dinero en acciones de las minas de oro de Africa del Sur?

—¿Cómo demonios es posible que sepa Vd. eso?

—Elemental, mi querido Watson, confiese que ha quedado asombrado. Sin embargo es lo más fácil del mundo, deducción y deducción. Dentro de dos minutos dirá Vd. que eso es sencillísimo.

—Hay que escalonar una serie de deducciones para llegar al fin previsto: 1.°) Usted tenía anoche barro en las botas, señal ineludible de que estuvo en el campo, ya que en el empedrado de Londres ni hay barro ni ayer llovió. 2.°) En los bajos de sus pantalones había pelos blancos. Señal de que estuvo jugando con los perros de algún amigo. 3.°) El único amigo que Vd. tiene en las afueras de la ciudad es Grogan, y que éste además tiene perros. 4.°) Vd. me dijo hace dos semanas que Grogan le había dado un plazo de quince días para decidirse en concesiones mineras sudafricanas. 5.°) Su talonario de cheques está dentro de mi caja fuerte y Vd. no puede sacarlo ya que ignora la combinación y se lo tengo que dar yo personalmente. 6.°) Por lo tanto, Vd. no se propone invertir en ese negocio.

—Pero eso es absurdamente sencillo —dijo Watson.

—Totalmente.

TODO PROBLEMA RESULTA INFANTIL CUANDO SE LO HAN EXPLICADO.

QUE ES MAYOR

$\sqrt[4]{5}$ ó $\sqrt{2}$

A poder ser, estes operacio-nes se deben hacer de memoria y sin operar; pero si no te atreves con ello, ahí va el procedimiento con su correspondiente solución. Vamos a quitar radicales: nada mejor que elevarlos ambos a la octava potencia (radical 4 de la primera por dos de la segunda).

$(\sqrt[4]{5})^8 = 5^2 = 25$

$(\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$

como $16 < 25$, será

$\sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$

OTRO

Qué es mayor:

$\sqrt[4]{4}$ ó $\sqrt[7]{11}$

Decimos y hacemos con éste el mismo procedimiento anterior:

$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 128^2$

$(\sqrt[7]{11})^{28} = 11^4 = 121^2$

como $128^2 > 121^2$

será $\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{11}$

7.–SUMA DE LOS TERMINOS DE UNA PROGRESION GEOMETRICA ILIMITADA

Aplicando la fórmula de las limitadas tendremos:

$$S = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1}$$ (multiplicando los dos miembros de la fracción por (-1))

$$S = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

Aplicando la propiedad distributiva, tendremos:

$$S = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r}$$

Cuando el número de términos "n" crece ilimitadamente pueden darse tres casos distintos según sea el valor de la razón (r).

1.er caso.–Si "r" > 1, entonces r^n crece indefinidamente, la progresión es creciente y su suma será mayor que cualquier número por grande que sea, es decir, tiende a infinito.

$$S \to \infty$$

2.º caso.–Si "r" < 1, entonces r^n decrece y su valor se hace menor que cualquier número por pequeño que sea, es decir, r^n tiende a cero, por lo que el segundo término se anula y queda:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

3.er caso.–Si "r" $= 1$, tenemos que:

$$S = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 \ldots$$

$$S = a_1 + a_1 + a_1 \ldots$$

$S = a_1 n$; como "n" tiende a infinito,

$$S = \infty$$

8.–GENERATRIZ DE NUMEROS DECIMALES PERIODICOS

Una aplicación de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica ilimitada y decreciente es la obtención de fracciones generatrices de números decimales periódicos.

Ejemplo:

1) El número $0,\widehat{19}$ es decimal periódico puro, y se puede considerar como la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada de razón $r = 1/100$.

0,19, 0,0019, 0,000019, ... ó

$$\frac{19}{100}, \frac{19}{100^2}, \frac{19}{100^3}, \ldots$$

Como "r" es menor que 1, la suma será igual:

$$S = \frac{a_1}{1-r}; \text{ sustituyendo } S = \frac{19/100}{1-1/100}; \text{ operando:}$$

$$S = \frac{\frac{19}{100}}{\frac{100-1}{100}}; \quad S = \frac{19}{100-1}; \quad \boxed{S = \frac{19}{99}}$$

2) Calcular la fracción generatriz del siguiente número decimal $3,\widehat{24}$. Es un número decimal periódico puro, pero con parte entera. Puede considerarse como la suma de la parte entera y la suma de los términos de la progresión geométrica ilimitada.

$3,\widehat{24} = 3 + S$ (ilimitada) en la que $a_1 = 24/100$; $r = 1/100$

$$3,\widehat{24} = 3 + \frac{24/100}{1-1/100} = 3 + \frac{\frac{24}{100}}{\frac{100-1}{100}} = 3 + \frac{24}{100-1}$$

$$\frac{3(100-1)+24}{100-1} = \frac{300+24-3}{99} = \frac{324-3}{99}$$

3) Calculamos ahora la fracción generatriz de un decimal periódico mixto, $2,3\widehat{4}$. Para ello se considera que resulta de la suma del decimal exacto más la suma del decimal periódico, esto es:

$2,3\widehat{4} = 23/10 + 4/10^2 + 4/10^3 + \ldots$ la razón "r" $= 1/10$

$$2,3\widehat{4} = 23/10 + \frac{4/100}{1-1/10} = 23/10 + \frac{\frac{4}{100}}{\frac{10-1}{10}} = 23/10 + \frac{\frac{4}{10}}{10-1}$$

$$\frac{23(10-1)+4}{10(10-1)} = \frac{230+4-23}{100-10} = \frac{234-23}{90}$$

EJERCICIO PRACTICO

1) Hallar tres numeros en progresión geométrica sabiendo que su suma es 39 y su producto 729.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 39$$
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$$

El león es un animal que sabe improvisar muy bien, para lo cual le sirve su instinto y sus experiencias. Está perfectamente equipado para la caza. Todo en él responde a las necesidades de la naturaleza. Es un animal típicamente nocturno, capaz de recorrer 150 Km en una sola noche y puede saltar de 3 a 8 m.

Al rugido del león le denominan los indígenas "trueno", y desde luego resulta aterrador. Expresa una fuerza animal irresistible y furiosa que le sirve para intimidar a su víctima. El león apenas se deja ver de día pues permanece escondido descansando; sale a cazar de noche, y mientras más oscuro esté, mejor para él; aunque sus ojos no son fosforescentes reflejan la luz y algunas veces parece que relampaguean. En la mirada de esta majestuosa fiera es donde reside el secreto de su presencia; la expresión que revela es de una intensidad extraordinaria. El león caza para su hembra y para los cachorros si los hay, dejando las presas muertas a la entrada de la cueva donde se cobijan, volviendo luego a su papel de gran señor, de rey de los animales.

SOLUCION AL PROBLEMA DEL TENIS DE LA PAGINA 617.

El número de chicas lo representamos por x.

1.º) M.ª de los Angeles jugó contra 9 (8 + 1).
2.º) Diana jugó contra 10 (8 + 2).

.....
.....
.....

x^{y}. M.ª del Mar jugó contra (B + x).

Nos sale la ecuación:

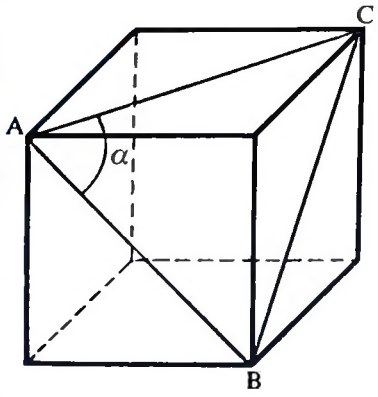
$$x + (B + x) = 24$$
$$2x = 24 - B = 16$$
$$x = B \text{ (chicas)}$$

Si en el campeonato había 24 participantes, los chicos serían $24 - B = 16$.

SOLUCION AL PROBLEMA DE LA PAGINA 621.

Si has dicho que mide 45°, mal: si has dicho 90°, peor. Veamos.

Trazamos una tercera diagonal, o sea la B, y nos forma por tanto un triángulo equilátero, y los ángulos de un triángulo equilátero son de 60°. Para que lo comprendas mejor, es como si cortásemos la figura por la mitad y diagonalmente, la cara de atrás nos da un perfecto triángulo equilátero. Si has dicho que tiene 45° entonces me has formado un triángulo que tiene:



45° x 3 = 135°, pues ¡qué bien! Si has dicho que 90° entonces tu triángulo tiene 90 x 3 = 270° ¿no?

Poniéndolos en función de a_1 tendremos que:

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 = 39$$

$$a_1 (a_1r) \cdot (a_1r^2) = 729$$

Sacando factor común a_1 en la primera ecuación $a_1 (1 + r + r^2) = 39$, y operando en la segunda $a_1^3 \cdot r^3 = 729$; $a_1^3r^3 = 3^6$; simplificando: $a_1r = 3^2$

$$a_1 = \frac{3^2}{r}; \text{ sustituyendo}$$

$$\frac{3^2}{r}(1 + r + r^2) = 39; \text{ operando}$$

$$\frac{3^2 + 3^2r + 3^2r^2}{r} = 39;$$

$$3^2 + 3^2r + 3^2r^2 = 39r; \text{ simplificando}$$

$$3 + 3r + 3r^2 = 13r$$

$$3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$r = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1/3 \end{cases}$$

$r = 3$
$r = 1/3$ $\quad a_1 = \frac{3^2}{3}$; $\boxed{a_1 = 3}$

$a_2 = a_1r$; $a_2 = 3 \cdot 3$; $\boxed{a_2 = 9}$

$a_3 = a_1r^2$; $a_3 = 3 \cdot 3^2$; $\boxed{a_3 = 27}$

Tomando la otra solución "r" = 1/3

$$a_1 = 27$$

$$a_2 = 9$$

$$a_3 = 3$$